گروه‌های مانده‌متناهی متناوب، با زیرگروه‌های از مرتبه‌متناهی

احمدعلی قربان‌پور

مدرس دانشگاه امام‌حسین(ع)[1]

چکیده:

دراین مقاله، به بررسی و مطالعه‌ی گروه‌هایی با شرایط متناهی بودن اضافی می‌پردازیم. شاخص‌ها و معیارهای مانده‌متناهی بودن و حل‌پذیری تقریباً موضعی یک $\mathbf{F}^*$-گروه متناوب، را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

واژگان کلیدی:

مانده‌متناهی، زیرگروه‌های آبلی، متناوب، زیرگروه سیلو، گروه چرنیکوف

[1] Ahmadali_ghorbanpoor1400@yahoo.com

۱.مقدمه

دراین مقاله، به بررسی و مطالعه گروه‌هایی با شرایط متناهی بودن اضافی می‌پردازیم. ابتدا ما به بیان تعاریف و مفاهیم شناخته‌شده نظریه گروه‌ها، اعم از گروه متناوب، گروه مانده‌متناهی، زیرگروه سیلو[۱] و گروه چرنیکوف[۲] اشاره می‌کنیم. (مراجعه به [۳و۴])

در این‌جا ما برخی از تعاریف و مفاهیم و نمادها و گزاره‌ها را در موضوعات مختلف، در این مقاله بیان خواهیم کرد:

تعریف ۱-۱) مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های اول ترتیبی، از اعضای گروه متناوب $\mathbf{G}$ را با $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{G})$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱-۲) گروه $\mathbf{G}$ را $\mathbf{F}^*$-گروه[۳] می‌نامیم؛ هرگاه به ازای هر زیرگروه $\mathbf{K}$ و $\mathbf{B}$، از $\mathbf{G}$ به‌طوری که $\mathbf{K}\subset\mathbf{B}$ و $|\mathbf{K}| < \infty$ و به ازای هر $\mathbf{b} \in \mathbf{H}$ و $\mathbf{a}$ از مرتبه یکسان، یک عضو $\mathbf{c} \in \mathbf{H}$ وجود داشته باشد؛ به قسمی‌که گروه $\mathbf{gp}\langle \mathbf{a}.\mathbf{b}^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{ac}\rangle$ متناهی باشد.

تعریف ۱-۳) گروه متناوب $\mathbf{F}^*$-گروه را $\mathbf{KF}^*$-گروه[۴] می‌نامیم؛ هرگاه به ازای هر $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\pi}(\mathbf{G})$ ، حداقل یک $\mathbf{p}$-زیرگروه سیلو وجود داشته باشد که متناهی باشد. اگر فرض کنیم برای یک عدد اول $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\pi}(\mathbf{G})$ درست باشد؛ در این‌صورت گروه را $\mathbf{KF}^*$-گروه می‌نامیم.

تعریف ۱-۴) هرگاه $\mathbf{p}$ یک عدد اول باشد، گروه $\mathbf{G}$ را $\mathbf{p}$-شبه‌حلقوی[۵] می‌نامیم؛ به قسمی‌که $\mathbf{p}$-گروه منحصربه‌فردی باشد، که در آن هر عضو دارای $\mathbf{p}$ ریشه‌های متمایز $\mathbf{p}$ اُم است.

تعریف ۱-۵) گروه $\mathbf{G}$ را گروه چرنیکوف[۶] می‌نامیم؛ هرگاه یک زیرگروه نرمال[۷] $\mathbf{N}$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ متناهی باشد و $\mathbf{N}$ حاصل‌ضرب متناهی از گروه‌های $\mathbf{p}$-شبه‌حلقوی باشد.

گزاره ۱-۶)(قضیه گورچاکوف[۸]) گروه حل‌پذیر موضعی متناوب، از مرتبه متناهی است؛ اگر و فقط اگر مرتبه زیرگروه‌های آبلی از آن متناهی باشند. (مراجعه به[۲])

---

[1] Sylow Subgroup
[2] Chernikov Group
[3] F^*-Group
[4] $kF^* - $ Group
[5] P-Quasi Cyclic Group
[6] Chernikov Group
[7] Normal Subgroup
[8] Gorchakov's Theorem

گزاره۱-۷)(قضیه تامپسون[1]) یک گروه حل‌پذیر دودویی متناهی، حل‌پذیر است.

گزاره ۱-۸) یک گروه بی اولیه متناهی دارای یک زیرگروه آبلی نامتناهی است.(مراجعه به[۱۰])

گزاره۱-۹)(قضیه مایاکوا[2]) یک $\mathbf{p}$-گروه متناهی موضعی دارای مرتبه متناهی است، اگر و فقط اگر یک گروه چرنیکوف باشد. (مراجعه به [۵])

گزاره ۱-۱۰)(قضیه شانکوف[3]) یک گروه متناهی موضعی با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی، تقریباً گروه حل‌پذیر موضعی از مرتبه متناهی می‌باشد. (مراجعه به [۹])

گزاره۱-۱۱)(لم فراتینی[4]) فرض کنید $\mathbf{G}$ یک گروه و $\mathbf{H}$ زیرگروه نرمال $\mathbf{G}$ و $\mathbf{S}$ یک $\mathbf{p}$-زیرگروه سیلو از $\mathbf{H}$ باشند؛ به‌طوری که $\mathbf{p}$-زیرگروه‌های سیلو از $\mathbf{H}$ با خودش مزدوج باشند؛ آنگاه $\mathbf{G}=\mathbf{N_G(S)H}$.

گزاره۱-۱۲) یک $\mathbf{F^*}$-گروه نامتناهی که یک $\mathbf{p}$-گروه مانده‌متناهی[5] است؛ دارای یک زیرگروه متناهی موضعی است.

گزاره۱-۱۳) گیریم $\mathbf{H}$ یک زیرگروه نرمال از $\mathbf{KF^*}$-گروه $\mathbf{G}$ باشد. اگر $\mathbf{G}$، $\mathbf{p}$-مانده متناهی باشد، در این صورت عامل گروه $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ یک $\mathbf{p}$-مانده‌متناهی $\mathbf{KF_p^*}$-گروه می‌باشد.

گزاره ۱-۱۴) گیریم $\mathbf{G}$ یک $\mathbf{KF^*}$-گروه متناوب و $\mathbf{a}$ یک عضو از مرتبه عدد اول $\mathbf{p}$، از گروه $\mathbf{G}$ باشند؛ شرایط زیر برقرار است:

(۱) $\mathbf{\pi(G)}/\mathbf{\pi(C_G(a))}$ متناهی است.

(۲) تقریباً به ازای هر $\mathbf{q}\in\mathbf{\pi(C_G(a))}$، $\mathbf{q}$-زیرگروه سیلو از $\mathbf{C_G(a)}$ وجود دارند؛ که $\mathbf{q}$-زیرگروه سیلو در $\mathbf{G}$ است.

اگر گروه $\mathbf{G}$ مانده‌متناهی باشد، آنگاه بستار هر عضو مانند $\mathbf{a}$ در گروه $\mathbf{G}$، متناهی است.

گزاره ۱-۱۵) گیریم $\mathbf{G}$، $\mathbf{KF^*}$-گروه مانده‌متناهی متناوب باشد، و $\mathbf{M}$ یک مجموعه نامتناهی از زیرگروه‌های غیریکریخت باشد، و $\mathbf{P_1}$ زیرگروهی در آن انتخاب شود. در این‌صورت یک دنباله نامتناهی از زیرگروه‌های سیلو از $\mathbf{T}$، به‌صورت اجتماع متناهی از زیرگروه‌های هال[6] می‌باشد و خواهیم داشت:

[1] Thompson’s Theorem
[2] Myagkova’s Theorem
[3] Shunkov’s Theorem
[4] Frattini’s Lemma
[5] Residually Finite
[6] Hall Subgroups

$$\mathbf{B_1 < B_2 < \cdots < B_n < \cdots < T}$$ و

$$\mathbf{B_1 \cong P_1}$$ و

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{T}) \subseteq \boldsymbol{\pi}(\mathbf{M})$$.

گزاره ۱-۱۶) فرض کنید عدد اول $\mathbf{p}$ دلخواه باشد، هر گروه دودویی تناوبی قابل حل با pزیرگروه‌های سیلو چرنیکوف برای همه اعداد اول p دارای یک قسمت کامل R است و عامل گروه $\mathbf{G}/_{\mathbf{R}}$، یک گروه حل‌پذیر دودویی مانده‌متناهی با $\mathbf{p}$-زیرگروه‌های سیلوی متناهی خواهد بود. (مراجعه به [۸])

۲.گروه‌های مانده متناهی متناوب

قضیه۲-۱)فرض کنید عدد اول $\mathbf{p}$ دلخواه باشد، یک $\mathbf{F}^*$-گروه متناوب با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی، یک گروه متناهی موضعی با $\mathbf{p}$-زیرگروه سیلو است؛ اگر و فقط اگر مانده‌متناهی باشد.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{G}$ یک گروه متناهی موضعی با $\mathbf{p}$-زیرگروه سیلوی متناهی باشد. و مرتبه زیرگروه‌های آبلی آن متناهی باشد. طبق گزاره (۱-۹)، گروه $\mathbf{G}$ تقریباً حل‌پذیر موضعی است و طبق گزاره(۱-۱۶) مانده‌متناهی است. از طرف‌دیگر، فرض کنید $\mathbf{G}$ گروه مانده‌متناهی متناوب با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی باشد. ابتدا باید ثابت کنیم $\mathbf{G}$، $\mathbf{KF}^*$-گروه است. فرض کنیم برقرار نباشد، و $\mathbf{G}$ دارای یک $\mathbf{p}$-زیرگروه نامتناهی باشد و ($\mathbf{p} \in \boldsymbol{\pi}(\mathbf{G})$). همچنین $\mathbf{p}$، مانده‌متناهی است و با توجه به فرض قضیه و گزاره(۱-۱۱)، $\mathbf{G}$ دارای یک زیرگروه متناهی موضعی $\mathbf{K}$ از مرتبه متناهی است(گزاره ۱-۸). طبق گزاره(۱-۱۳) زیرگروه $\mathbf{K}$ یک گروه چرنیکوف است. لذا به تناقض با مانده‌متناهی بودن $\mathbf{K}$ می‌رسیم.

حال فرض کنید رادیکال متناهی موضعی $\mathbf{G}$ را با $\mathbf{R(G)}$، نشان می‌دهیم؛ اگر $\mathbf{G = R(G)}$، در این‌صورت قضیه اثبات می‌شود.

فرض کنید $\mathbf{R(G) \neq 1}$؛ عامل‌های گروه $\mathbf{G}/_{\mathbf{R(G)}}$ ، یک گروه مانده‌متناهی با $\mathbf{p}$-گروه سیلو باشد، و با توجه به گزاره(۱-۱۳)؛ و علاوه برآن گزاره(۱-۱۰)، به‌آسانی متناهی بودن مرتبه زیرگروه‌های آبلی اثبات می‌شود. بنابراین $\mathbf{G}/_{\mathbf{R(G)}}$، تمام شرایط قضیه را تأمین می‌کند و دارای یک رادیکال متناهی موضعی بدیهی است.

بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد، $\mathbf{R(G) = 1}$.

لم ۲-۲) در گروه $\mathbf{G}$ ، در مجموع مرتبه زیرگروه‌های سیلو متناهی است.

اثبات: فرض کنید حکم برقرار نباشد؛ آنگاه به ازای $\mathbf{i = (1.2.3.\cdots.n.\cdots)}$ ، $\mathbf{G}$ به‌صورت یک دنباله نامتناهی از $\mathbf{p_i}$-زیرگروه‌های سیلو، $\mathbf{P_1.P_2.\cdots.P_n.\cdots}$ است، که به ازای هر $\mathbf{i}$، مرتبه آنها با هم‌دیگر رشد می‌کند.

طبق گزاره (۱-۱۵) در $\mathbf{G}$ یک زیرگروه متناهی موضعی، نامتناهی از $\mathbf{T}$ که اجتماع متناهی از زیرگروه‌های هال $\mathbf{T < \cdots < B_n < \cdots < B_2 < B_1}$ ، به‌طوری‌که $\mathbf{\pi(T) \subseteq \pi(M)}$ و $\mathbf{M = \{P_1.P_2.\cdots\}}$. با ساخت $\mathbf{T}$ و انتخاب مجموعه $\mathbf{M}$ ، مرتبه $\mathbf{T}$ نامتناهی می‌شود. لذا به تناقض رسیدیم پس حکم برقرار است.

طبق لم (۲-۲) به ازای هر عدد اول $\mathbf{p \in \pi(G)}$ ، عدد طبیعی $\mathbf{k}$ وجود دارد؛ به‌طوری که به ازای هر $\mathbf{p}$-زیرگروه سیلوی $\mathbf{P}$ ، $\mathbf{\left|P/_{\Phi(P)}\right| \leq k}$.

گیریم $\mathbf{p}$ یک عدد دلخواه از $\mathbf{\pi(G)}$ باشد. همچنین $\mathbf{G}$ ، یک گروه مانده‌متناهی باشد، که دارای یک زیرگروه نرمال $\mathbf{N}$ از اندیس متناهی که فاقد $\mathbf{p}$-عنصرها است.

حال قرار می‌دهیم؛

$\mathbf{H_p = G/_N}$ و $\mathbf{n_p = |H_p|}$ و به ازای $\mathbf{(q.n_p) = 1}$ ، $\mathbf{Q}$ و یک $\mathbf{q}$-زیرگروه سیلو از $\mathbf{N}$ است.

با توجه به گزاره (۱-۱۱) گروه نمایش‌گر $\mathbf{G = N_G(Q)N}$ است. با استفاده از قضیه یکریختی، خواهیم داشت؛

$$\mathbf{H_p = G/_N = N_G(Q)N/N \cong N_G(Q)/N \cap N_G(Q)}$$

که $\mathbf{T = N \cap N_G(Q)}$ ، یک $\mathbf{p}$ -گروه است. بنابراین زیرگروه فراتینی[1] از گروه $\mathbf{Q}$ را با $\mathbf{\Phi(Q)}$ نشان می‌دهیم و داریم: $\mathbf{\Phi(Q) \lhd Q}$.

واضح است که $\mathbf{\bar{Q} = Q/_{\Phi(Q)}}$ یک $\mathbf{q}$-زیرگروه آبلی نرمال مقدماتی از عامل گروه $\mathbf{B = N_G(Q)/_{\Phi(Q)}}$ و $\mathbf{C_B(Q)}$ زیرگروه نرمال $\mathbf{B}$ است.

فرض کنید $\mathbf{C}$ تصویر معکوس $\mathbf{C_B(\bar{Q})}$ در $\mathbf{N_G(Q)}$ باشد. زیرگروه‌های $\mathbf{C \lhd N_G(Q)}$ و $\boldsymbol{V_p} = \frac{N_G(Q)}{C}$ یک گروه خطی از میدان با مشخصه $\mathbf{q}$ هستند که $\mathbf{q}$ ،غیرقابل تقسیم برمرتبه $\boldsymbol{V_p}$ باشد.

[1] Frattini Group

با توجه به قضیه جوردن-براور-فیت[1]، گروه $\boldsymbol{V_p}$ دارای یک زیرگروه نرمال آبلی $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{f(k)}$ یک تابع وابسته به $\mathbf{k}$ است به‌طوری که $|\boldsymbol{V_p}:\mathbf{L}| \leq \mathbf{f(k)}$.

با استفاده از قضیه یکریختی‌ها داریم:

$$\boldsymbol{A_q = \frac{CN}{N} = \frac{CN}{T} \lhd N_G(Q)/T}$$

$$\overline{\boldsymbol{H_p}} = {}^{\boldsymbol{H_p}}\!/_{\boldsymbol{A_q}} \cong {}^{\boldsymbol{N_G(Q)}}\!/_{\boldsymbol{CT}} = {}^{\boldsymbol{N_G(Q)C}}\!/_{\boldsymbol{CT}} \cong \frac{{}^{\boldsymbol{N_G(Q)C}}\!/_{\boldsymbol{C}}}{{}^{\boldsymbol{CT}}\!/_{\boldsymbol{C}}} = {}^{\boldsymbol{V_p}}\!/_{\boldsymbol{F}}$$

که $\boldsymbol{F = {}^{CT}\!/_{T}}$.

با توجه به ساختار زیرگروه $\boldsymbol{V_p}$، عامل گروه $\overline{\boldsymbol{H_p}} \cong {}^{\boldsymbol{V_p}}\!/_{\boldsymbol{F}}$ دارای یک زیرگروه نرمال آبلی از مشخصه کراندار به مقدار $\boldsymbol{f(k)}$.

برای اثبات قضیه ضروری است، دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

(۱) $\boldsymbol{\bigcap_{q\in\pi(N)\setminus\pi(H_p)} A_q = D \neq 1}$

(۲) $\boldsymbol{D = 1}$

ابتدا حالت اول را فرض می‌کنیم. گیریم d یک عضو ناصفر از گروه $\mathbf{D}$ از مرتبه اول باشد. با توجه به تعریف زیرگروه $\mathbf{C}$ و گزاره(۱-۹) و $\boldsymbol{(|d|.q) = 1}$ ،عضو $\mathbf{d}$ متمرکز کننده زیرگروه $\mathbf{Q}$ می‌باشد. هم‌چنین $\boldsymbol{{}^{\pi(N)}\!/_{\pi(H)}}$ متناهی و $\mathbf{q}$ دلخواه باشد؛ عضو $\mathbf{d}$ تمام الزامات گزاره (۱-۱۴) را برآورده می‌کند و رادیکال متناهی موضعی گروه $\mathbf{G}$ غیربدیهی است که تناقض با فرض است.

بنابراین فرض کنیم حالت دوم برقرار باشد: $\boldsymbol{D = 1}$.

با توجه به تبصره قضیه (مراجعه به [۳]، ص۵۴) گروه $\boldsymbol{H_p}$ ، با حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های از نوع $\boldsymbol{{}^{H_p}\!/_{A_q}}$ یکریخت است. هر گروهی با این شکل که در بالا نشان داده شد؛ دارای یک زیرگروه نرمال آبلی از مشخصه متناهی که

[1] Jordan-Brauer-Feit

از $f(k)$، تجاوز نمی‌کند. بنابراین، گروه H_p دارای یک زیرگروه نرمال آبلی V_p، است به‌طوری که تناوب گروه به مقدار $f(k)$، کراندار است و به انتخاب $p \in \pi(G)$، وابسته نیست. از طرفی با استفاده از تبصره قضیه، گروه $\mathbf{G}$ را به‌صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های H_p؛

$$G \cong G_1 < H = \prod_{p\in\pi(G)} H_p$$

می‌توان نوشت. گیریم $\mathbf{m}$، تعداد مقسوم علیه‌های متناوب از عامل‌های گروه‌های ${H_p}/{Y_p}$.

همان‌طور که در بالا نشان داده شده است چنین عددی وجود دارد. زیرگروه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$H^m = gp\langle h^m | h \in H\rangle$$

پس به ازای هر $p \in \pi(G)$، گروه آبلی Y_p و زیرگروه آبلی H^m ، عامل گروه ${H}/{H^m}$ گروهی با تناوب $\mathbf{m}$ است.

با توجه به فرض $G \cong G_1 < H$. فرض کنید $\mathbf{A}$ زیرگروه نرمال آبلی از $\mathbf{G}$ باشد به‌طوری که تناوب عامل گروه برابر $\mathbf{m}$ باشد. طبق گزاره(۱-۱۳) ${G}/{A}$ یک $\mathbf{KF}^*$-گروه مانده‌متناهی است. و نیز تناوب آن متناهی است و مشخصه $|G:A|$ متناهی است. پرواضح است؛ گروه $\mathbf{G}$ متناهی موضعی است حال آنکه این یک تناقض با فرض $R(G) = 1$ است و لذا قضیه (۲-۱) اثبات شد.

قضیه ۲-۳) گروه متناوب $\mathbf{G}$ حل‌پذیر موضعی از مرتبه متناهی است؛ اگر و فقط اگر حل‌پذیر دودویی باشد و مرتبه زیرگروه‌های آبلی آن متناهی باشد.

اثبات: وجوب شرایط قضیه بدیهی است.

فرض کنید $\mathbf{G}$ گروه حل‌پذیر دودویی متناوب با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی باشد. طبق گزاره(۱-۸) به‌آسانی می‌توان نشان داد به ازای هر $p \in \pi(G)$، $\mathbf{p}$-زیرگروه‌های سیلو از $\mathbf{G}$، چرنیکوف هستند. طبق گزاره (۱-۱۶)، $\mathbf{G}$ دارای بخش پُر $\mathbf{R(G)}$ است و به ازای هر $p \in \pi({G}/{R(G)})$، عامل گروه ${G}/{R(G)}$ برابر است با؛ یک گروه حل‌پذیر دودویی متناوب با $\mathbf{p}$-زیرگروه‌های سیلو متناهی. علاوه براین گروه ${G}/{R(G)}$ ، مانده‌متناهی است و به‌آسانی از گزاره(۱-۱۰) می‌توان نشان داد که مرتبه‌های زیرگروه‌های آبلی از آن متناهی‌اند. بنابراین ${G}/{R(G)}$ همه شرایط قضیه را تضمین می‌کند و یک گروه متناهی موضعی است. از قضیه اشمیت[1] متناهی موضعی بودن $\mathbf{G}$ و از قضیه

[1] Schmidt's Theorem

تامپسون(گزاره ۱-۷) حل‌پذیر موضعی آن نتیجه می‌شود. و طبق قضیه گورچاکوف(گزاره ۱-۶)، مرتبه گروه **G** متناهی است و قضیه اثبات شد.

نتیجه: گروه حل‌پذیر دودویی متناوب از مرتبه نامتناهی، دارای یک زیرگروه آبلی از مرتبه نامتناهی است.

قضیه۲-۴) یک $\mathbf{F}^*$-گروه متناوب با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی، تقریباً حل‌پذیر موضعی از مرتبه متناهی است؛ اگر و فقط اگر به ازای هر دو عضو تولیدشده توسط آن، گروه مانده‌متناهی باشد.

اثبات: فرض کنید **G**، $\mathbf{F}^*$-گروه متناوب با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی باشد، که هر دو عضو تولیدشده توسط آن، مانده‌متناهی باشد. فرض کنید **a** و **b** اعضای دلخواه از **G** باشند. زیرگروه $gp\langle a.b\rangle$، یک $\mathbf{KF}^*$-گروه مانده‌متناهی متناوب با زیرگروه‌های آبلی با مرتبه متناهی است. طبق قضیه(۲-۱) مانده‌متناهی است و نیز $gp\langle a.b\rangle$ متناهیاً تولید شده است و $|gp\langle a.b\rangle| < \infty$. انتخاب اعضای **a** و **b** دلخواه بوده است، بنابراین **G** یک گروه متناهی دودویی است. یک گروه متناهی دودویی با زیرگروه‌های آبلی از مرتبه متناهی، متناهی موضعی است(مراجعه به[۷]) و طبق قضیه شانکوف(گزاره۱-۱۰)، گروه **G** تقریباً حل‌پذیر موضعی از مرتبه متناهی است و لذا قضیه اثبات شد.

۳.نتیجه

ما در این مقاله شرایط مانده‌متناهی بودن و حل‌پذیر موضعی بودن گروه‌ها را بیان کردیم. ابتدا تعاریف $\mathbf{F}^*$-گروه و $\mathbf{KF}^*$-گروه را تعریف کردیم و شرایط شبه-حلقوی بودن گروه‌ها و مفاهیم زیرگروه‌های سیلو و گروه‌های چرنیکوف، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. در ادامه قضایا و گزاره‌های مختلف در زمینه‌های حل‌پذیر موضعی بودن، مانده‌متناهی بودن و متناهی موضعی متناوب بودن، گروه‌ها بیان شد.

مهم‌ترین قضیه این مقاله **قضیه (۲-۱)** بود که به بررسی شرایط مانده‌متناهی بودن گروه‌ها و زیرگروه‌های سیلو می‌پرداخت؛ و در انتها در **قضیه (۲-۴)** شرایط حل‌پذیر موضعی گروه‌ها در تناظر با مانده‌متناهی بودن گروه‌ها مورد بیان قرار گرفت.

منابع:

[۱] . S. N. Chernikov, *Groups with Given Properties of Its System of Subgroups* [in Russian], Nauka,
Moscow (1980).
[۲]. Yu. M. Gorchakov, *Groups with Finite Classes of Conjugate Elements* [in Russian], Nauka, Moscow
(1978).
[۳]. M. I. Kargapolov and Yu. I. Merzlyakov, *Fundamentals of the Theory of Groups* [in Russian], Nauka,
Moscow (1996).
[۴]. A. G. Kurosh, *Theory of Groups* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
[۵]. N. N. Myagkova, "On groups of finite rank," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 13, 495–512 (1949).
[۶]. A. N. Ostylovskii, "Groups with certain minimal conditions," in: *Proc. 14th All-Union Algebra Conf.*
[in Russian], Novosibirsk (1977), pp. 49–50.
[۷]. I. I. Pavlyuk, *Some Periodic Groups with Given Finiteness Conditions for Locally Solvable Groups*
[in Russian], Candidate's Dissertation in Physics and Mathematics, Novosibirsk (1982).
[۸]. E. I. Sedova, "On groups with Abelian subgroups of finite ranks," *Algebra Logika*, 21, No. 3, 321–343
(1982).
[۹]. V. P. Shunkov, "On locally finite group of finite rank," *Algebra Logika*, 10, No. 2, 199–225 (1971).
[۱۰]. V. P. Shunkov, "On Abelian subgroups in biprimitively finite groups," *Algebra Logika*, 12, No. 5,
603–614 (1973)