رده بندی گروههای از مرتبه ۷۰ و۱۴۰ وتعیین مرکز ومرتبه گروه خودریختی آنها

جوانشیر رضایی [*,1]، محمد رضا سالاریان [2]

1- دانشجوی دکتری ریاضی(گرایش جبر) دانشکده علوم ریاضی وکامپیوتر دانشگاه خوارزمی تهران، ایران.

e-mail:jre927@gmail.com

۲-استاد یار دانشکده علوم ریاضی وکامپیوتر دانشگاه خوارزمی تهران، ایران .

e-mail:salarian@khu.ac.ir

چکیده

فرض کنید G گروهی از مرتبه ۷۰یا ۱۴۰باشد.دراین مقاله ساختار G راتعیین میکنیم ونشان میدهیم از مرتبه۷۰، ۴گروه واز مرتبه۱۴۰، ۱۱گروه تاحد یکریختی وجوددارند، مرکز این گروهها ومرتبه گروه خودریختی این گروهها را تعیین می کنیم.

واژه های کلیدی: حاصل ضرب مستقیم، جاصل ضرب نیم مستقیم،گروه خود ریختی های یک گروه، مرکزگروه، گروه دو وجهی

۱. مقدمه

یکی از مباحث با اهمیت درنظریه گروههای متناهی، تعیین تعداد وساختار گروهها از یک مرتبه مشخص است.در سال۱۸۵۴کیلی اولین تعریف مجرد از گروه را ارائه کرد.اونشان داد هرگروه با زیرگروهی از یک گروه جایگشتی یکریخت است وسپس گروههای از مرتبه۴و۶ را تا حد یکریختی کاملا" مشخص کرد[1]. با توجه به قضیه لاگرانژ،هرگروه از مرتبه ی عدداول P، با Z_p یکریخت است. به سادگی می توان نشان داد که هرگروه از مرتبه ی p^2،با Z_{p^2}یا $Z_p\times Z_p$ یکریخت است. باتوجه به[2] از مرتبه ی p^3 تا حد یکریختی دقیقا" پنج گروه وجود

دارد. گروههای از مرتبه p^4، p^5 و p^6 به ترتیب در[3]،[4] و[5]رده بندی شده اند. مادر این مقاله گروهای از مرتبه ۷۰و۱۴۰را رده بندی می کنیم ابزارما دراین تحقیق حاصل ضرب نیم مستقیم دو گروه است.

۲. مقدمات وپیش نیاز ها

فرض می کنیم خواننده با مفاهیم اساسی نظریه گروهها آشنایی دارد. در این بخش مختصری ازمفاهیم اساسی نظریه گروهها را یاد آوری می کنیم فرض کنید G گروهی متناهی باشد، تعداد اعضای G را مرتبه G می نامیم وبا |G| نشان می دهیم. عضو همانی را با۱ و گروه همانی را با< ۱> نشان می دهیم

Hرا زیر گروه Gمی نامیم ومی نویسم $H \leq G$، هرگاه Hتحت عمل تعریف شده در**G** گروه باشد.N را زیرگروه نرمال G می نامیم هرگاه برای هر $g\in G$ و $\mathbf{n}\in N$ داشته باشیم،$g^{-1}ng\in N$ و می نویسیم $N\trianglelefteq G$

اگر $N\trianglelefteq G$، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{G}{N}=\{aN|a\in G\} \qquad (۲.۱)$$

که عمل این گروه به صورت $aNbN = abN$ تعریف می شود .

مرکز گروه G را با Z(G) نشان داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم

$$Z(G)=\{ x\in G|xy=yx;\forall y\in G\} \qquad (۲.۲)$$

Z(G) **زیر گروه نرمال** G **است و** G **آبلی است اکر وفقط اگر** Z(G)=G.

گروه G را دوری بامولد a می نامیم هرکاه برای هر $x\in G$، عدد صحیح nوجود داشته باشد به طوری که$\mathbf{x=a^n}$در این صورت مینویسیم$G=\langle a\rangle$.

فرض کنید $n\in N$ و $n\geq 3$، گروه دو وجهی از مرتبه 2n را با D_{2n} نمایش داده وبه صورت

(۲.۳)

$$D_{2n}=\langle a,b|a^n=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$$

بدیهی است اگر n فرد باشد D_{2n}،$\varphi(n)$ عضو از مرتبهn وn عضو از مرتبه ۲ دارد وهمچنین اگر nزوج باشد$\varphi(n)$عضو از مرتبهn وn+۱ عضو از مرتبه ۲ دارد . وبه سادگی می توان نشان داد

$$(D_{2n})=\begin{cases}\langle ۱\rangle & \text{فرد } n\\ \langle a^{\frac{n}{2}}\rangle & \text{زوج } n\end{cases} \qquad (۲.۴)$$

در واقع برایn فرد،مرکز D_{2n} همانی است وبرایn زوج،مرکز D_{2n} از مرتبه۲است.

برای $n \geq 3$، گروه کواتر نیون های تعمیم یافته از مرتبه ۴n را با Q_{4n} نشان داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q_{4n}=\langle a,b \mid a^{4}=b^{2n}=1, a^{2}=b^{n}, a^{-1}ba=b^{-1}\rangle \qquad (۲.۵)$$

واضح است که a^2 تنها عضو از مرتبه ۲است که با هر عضو این گروه جابجا می شود ودر واقع

(۲.۶)

$$Z(Q_{4n})=\langle a^{2}\rangle$$

فرض کنیم Hو G دوگروه ،تابع $\varphi:G\to H$ را یک همریختی می نامیم هرگاه برای هر $x,y\in G$ داشته باشیم

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \qquad (۲.۷)$$

واگر φ یک به یک وبرو باشد آن را یک یکریختی از G به H می نامیمودر این صورت دو گروه G وHرا یکریخت می نامیم ومی نویسیم $G\cong H$. اگر $\varphi:G\to H$یک همریختی باشد هسته φ را با kerφ نشان داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم:

(۲.۸)

$$\ker\varphi=\{x\in G \mid \varphi(x)=1_H\}$$

kerφ زیر گروه نرمال G است و $\frac{G}{\ker\varphi}\cong \mathrm{Im}\varphi=\varphi(G)$.

هر گروه دوری نا متناهی باZ وهر گروه دوری متناهی از مرتبه n با Z_n یکریخت است.

اگرp اول باشد و $|G| = p^{a}m$ و $p \nmid m$ آنگاه G حد اقل یک زیرگروه از مرتبه p^a دارد این زیرگروه را p–زیرگروه سیلوی G می نامیم همهp– زیرگروه سیلو ها ی G با هم مزدوج هستند وتعداد آنها به پیمانه p با ۱همنهشت هستند.

اگر G گروهی متناهی،a وb دو عضو به ترتیب ازمرتبه های m وn باشند به طوری که $(m,n)=1$و $ab=ba$،آنگاه مرتبه ab برابر است باmn.

در ادامه چند تعریف، لم وقضیه بیان می کنیم که در اثبات حکم اصلی مقاله از آنها استفاده می شود

برای اثبات لم ها وقضیه ها می توان به مراجع[2]،[3]و[6]رجوع کرد.

تعریف ۲.۱ هر یکریختی$\varphi:G\to G$ یک خود ریختی می نامیم . مجموعه تمام خود ریختی های G را گروه خود ریختی های G می نامیم وآن را با $\mathrm{Aut}(G)$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم $x,g\in G$.مزدوج x بوسیله gرا با $g^{-1}xg$ تعریف کرده وآن را با x^g نشان می دهیم.

به ازای هر $g\in G$، تابع $\begin{matrix}\alpha_g:G\to G\\ x\to x^g\end{matrix}$ یک خودریختی Gاست. این خودریختی راخود ریختی داخلی G القا شده با g می نامیم. مجموعه تمام خود ریختی های داخلی Gرا گرو خودریختی های داخلی G می نامیموآن را با $Inn(G)$ نشان می دهیم.

قضیه ۲.۲ $Inn(G)\trianglelefteq Aut(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}\cong Inn(G)$

تعریف۲.۳ فرض کنید $n\in N$تعریف می کنیم $Z_n^*=\{k\in N|1\le k<n,(k,n)=۱\}$. این مجموعه با عمل ضرب به پیمانه n تشکیل یک گروه می دهد.واضح است که، $|Z_n^*|=\varphi(n)$ وبرای pاول داریم: $Z_p^*\cong Z_{p-1}$

لم ۲.۴ $Aut(Z_n)\cong Z_n^*$

تعریف ۲.۶ فرض کنید HوK دو گروه باشند. در حاصل ضرب دکارتی $H\times K$ عمل زیر را در نظر می گیریم:

$$(h,k)(h',k')=(hh',kk')(h,h'\in H,k,k'\in K) \quad (۲.۹)$$

مجموعه $H\times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد. این گروه را حاصل ضرب مستقیم خارجی HوK می نامیم و آن را با $H\times K$ نشان می دهیم.

قضیه۲.۷ فرض کنید HوKدو زیر گروه نرمال G باشند به طوری که $G=HK$ و $H\cap K=1$،آنگاه

$$G\cong H\times K \quad (۲.۱۰)$$

$H\times K$را حاصل ضرب مستقیم داخلیHوKمی نامیم و داریم :

$$Z(G)\cong Z(H)\times Z(K) \quad (۲.۱۱)$$

واگر G متناهی باشد و$(|H|,|K|)=1$ داریم :

$$Aut(G)\cong Aut(H)\times Aut(K) \quad (۲.۱۲)$$

تعریف۲.۸ فرض کنید HوK دوگروه و$\varphi:H\to Aut(K)$یک همریختی باشد. برای هر $h\in H$، تصویر h را باφ_hنشان می دهیم در حا صل ضرب دکارتی$H\times K$ ،عمل دوتایی زیر را تعریف می کنیم :

$(h,k)(h',k')=(hh',\varphi_h(k)k')$(۱۳.۲)

قضیه ۲.۹ با تعریف و نماد ها ی فوق $H\times K$ یک گروه است. این گروه را حاصل ضرب نیم مستقیم H و K با عمل φ می نامیموآن را با $H \ltimes_{\varphi} K$ نشان می دهیم ودر صورتی که ابهامی درمورد. پیش نیاید می نویسیم $H\ltimes K$.

قضیه ۲.۱۰ فرض کنید H وKدو زیر گروه G باشند که $K\trianglelefteq G$، $H\cap K=<1>$ و $G=HK$ در این صورت

$G\cong H \ltimes_{\varphi} K$ که در آن و $\varphi:H\rightarrow Aut(K)$ یک همریختی است.

فرض کنید G یک گروه با مجموعه مولد X ومجموعه روابط R بین اعضای Xباشد. گروه G با مجموعه مولد X ومجموعه روابط R را با $G=(X|R)$ نشان می دهیم.

قضیه ۲.۱۱ فرض کنیم $H = (X|R)$،$K = (Y|S)$ و $\varphi:H\rightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد. فرض کنیم برااي هر $x\in X$ و هر $y\in Y$،$\varphi_x(y) = w_x(y)$ که در آن $w_x(y)$ کلمه ای برحسب $Y^{\pm1}$ در این صورت:

$$H \ltimes_{\varphi} K\cong<X\cup Y, R\cup S\cup\{x^{-1}yxw_x(y)^{-1}|x\in X,y\in Y>\quad(۲.۱۴)$$

تعریف ۲.۱۲ فرض کنیم Pاول باشد.گروه E_{4p}به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{4p}=<a,b|a^{۴}=b^p=1,a^{-1}ba=b^t,t^{۴}\equiv1(modp)>\quad(۲.۱۵)$$

۳. احکام اصلی

در این بخش حکم اصلی مقاله رابیان واثبات می کنیم.

قضیه ۳.۱

۳.۱.۱ هرگروه از مرتبه ۷۰با یکی از گروهای زیر یکریخت است:

$$G_1=Z_{۷۰}, G_{۲}=D_{۷۰}, G_{۳}=Z_{۵}\times D_{۱۴} ,G_{۴}= Z_{۷}\times D_{۱۰}\quad(۱)$$

وعلاوه بر این داریم:

$$Z(G_1)=Z_{۷۰}،|Aut(G_{۱})|=۲۴ , Z(G_{۲})=۱،|Aut(G_{۲})|=۸۴۰\quad(۲)$$

$$Z(G_{۳})\cong Z_{۵}،|Aut(G_{۳})|=۱۶۸ ,Z(G_{۴})\cong Z_{۷}،|Aut(G_{۴})|=۱۲۰$$

۳.۱.۲هرگروه از مرتبه ۱۴۰با یکی از گروهای زیر یکریخت است:

$$G_1=Z_{۱۴۰}, G_{۲}=D_{۱۴۰}$$

$$G_۳=\langle a,d \mid a^۴ = d^{۳۵} =, a^{-۱}da = d^{-۸} \rangle$$

$G_۴= Z_{۱۴}\times D_{۱۰}$, $G_۵=Z_{۱۰}\times D_{۱۴}$,

$G_۶=\langle a,d \mid a^۴=d^{۳۵}=۱, a^{-۱}da=d^{۱۳}\rangle$ **(۳)**

$G_۷=Z_۷\times E_{۲۰}$, $G_۸=Q_{۱۴۰}$, $G_۹=Z_۵\times Q_{۲۸}$, $G_{۱۰}=Z_۷\times Q_{۲۰}$, $G_{۱۱}=Z_۲\times Z_۲\times Z_{۳۵}$

وعلاوه بر این داریم:

$(G_1)=\mathbf{Z_{۱۴۰}}$، $|\mathbf{Aut(G_۱)}|=۴۸$, $\mathbf{Z(G_۲)}\cong\mathbb{Z}_۲$، $|\mathbf{Aut(G_۲)}|=۱۶۸$ (۴)

$Z(G_۳)=\langle 1\rangle$، $|Aut(G_۳)|=1680$,$Z(G_۴)\cong Z_{14}$، $|Aut(G_۴)|=240$,$Z(G_۵)\cong Z_{۱۰}$,$|Aut(G_۵)|=336$

$Z(G_۶=\langle 1\rangle$,$|Aut(G_۶)|=1680$,$Z(G_۷)\cong Z_۷$,$|Aut(G_۷)|=۲۴۰$, $Z(G_۸)\cong\mathbb{Z}_۲$,$|Aut(G_۸)|=۱۶۸۰$

$$Z(G_۹) \cong \mathbb{Z}_{۱۰}, |Aut(G_۹)| = ۳۳۶, Z(G_{۱۰}) \cong \mathbb{Z}_{۱۴}, |Aut(G_۵)| = ۲۴۰, Z(G_{۱۱}) = G_{۱۱}, |Aut(G_{11})| = ۱۴۴$$

اثبات . فرض کنیم G گروهی از مرتبه ۷۰ باشد.$|G|=۲\times۵\times۷$. ۵ - زیرگروسیلوی G و ۷- زیرگروه سیلوی G در G نرمال هستند. می توان فرض کرد Gزیرگروهی نرمال مانند K از مرتبه۳۵ به صورت زیر دارد:

$K=\langle b,c \mid b^7=c^۵=1, bc=cb\rangle$ (۵)

فرض کنیم $H=\langle a\rangle$ یک، ۲- سیلو زیر گروه **G باشد. با توجه به قضیه (۲.۷)** $G\cong H\ltimes_{\varphi}K$ **که در آن:**

$\varphi: H \to Aut(K)$ یک همریختی است.مرتبه a برابر۲است ولذا مرتبه φ_a برابر۱یا۲است وبرای φ_a ۴حالت به صورت زیر وجود دارد.:

$$\begin{matrix} b \to b \\ c \to c \end{matrix}\ \varphi_a: \begin{matrix} b \to b \\ c \to c^{-۱} \end{matrix}\ \varphi_a: \begin{matrix} b \to b^{-۱} \\ c \to c \end{matrix}\ \varphi_a: \begin{matrix} b \to b^{-۱} \\ c \to c^{-۱} \end{matrix} \qquad (۶)$$

وبنا برقضیه ۲.۱۱گروههای زیر بدست می آیند:

$G_1=\langle a,b,c \mid a^۲=b^۵=c^7=1, ab=ba, ac=ca, bc=cb\rangle\cong Z_{70}$ (۷)

(8)

$G_2=\langle a,b,c \mid a^۲=b^۵=c^7=1, ab=b^{-1}a, ac=c^{-1}a, bc=cb\rangle=$

$< a, d|a^2 = d^{35} = 1, ad = d^{-1}a >\cong D_{70} \quad (d = bc)$

$G_2=<a,b,c \mid a^2=b^5=c^7=1,ab=ba,ac=c^{-1}a,bc=cb>\cong Z_5\times D_{14}$ (9)

$G_3=<a,b,c \mid a^2=b^5=c^7=1,ab=b^{-1}a,ac=ca,bc=cb>\cong Z_7\times D_{10}$ (10)

وبا توجه به رابطه(۲.۴) و (۲.۱۱)داریم: $Z(G_1)=G_1,Z(G_2)\cong Z_5 ,Z(G_3)\cong Z_7,Z(G_4)=<1>$

هر خود ریختی یک گروه بوسیله اثر آن روی مولد هایش به طور کامل مشخص می شود با توجه به لم ۲.۴

$|Aut(G_1)|=\varphi(70)=24$ (11)

D_{2n}، ۲مولد داردکه یکی ازمرتبه n ودیگری از مرتبه ۲است. تعداد موادهای از مرتبه n برابراست با $\varphi(n)$

وnمولد هم از مرتبه۲ داردولذا

$|Aut(D_{2n})|=n\varphi(n)$ (12)

با توجه به قضیه۲.۷ورابطه۲.۱۲داریم:

$|Aut(G_2)|=35\varphi(35)=840,\ |Aut(G_3)|=7\varphi(5)\varphi(7)=168,\ |Aut(G_4)|= 5\varphi(7)\varphi(5)=120$ (13)

وبه این ترتیب اثبات۳.۱.۱کامل می شود.

فرض کنیم G گروهی از مرتبه ۱۴۰ باشد.$|G|=2^2 5\times 7$. ۵ - زیرگروسیلوی G و ۷- زیرگروه سیلوی G در G نرمال هستند. می توان فرض کرد G زیرگروهی نرمال مانند K از مرتبه۳۵ به صورت زیر دارد:

$<b,c|b^5=c^7=1,bc=cb>=<d|d^{35}=1> \ (b=d^7,c=d^5,d=b^3c^3)$

فرض کنیم H، ۲- سیلو زیر گروه G **باشد. با توجه به قضیه (۲.۷) $G\cong H\ltimes_\varphi K$ که در آن:**

$\varphi:H\to Aut(K)$ یک همریختی است. دوحالت در نظر می گیریم .

H.۱ دوری است.بنابراین $H =< a >$و مرتبه φ_a برابر است با۲,1یا ۴ است. بنابراین:

$\varphi_a:\begin{matrix} b\to b^i \\ c\to c^j \end{matrix}$ که $1\le i\le 4,\ 1\le j\le 6$ و$\varphi_a^4=I$که در آن Iخودریختی همانی است وبنا بر این

$\varphi_a^4: \begin{matrix} b \to b^{i^4} = b \\ c \to c^{j^4} = c \end{matrix}$ (14)ولذا $i^4 \equiv 1(mod 5), j^4 \equiv 1(mod 7)$ ولذا

$$(i, j) = (1,1), (1,6), (2,1), (2,6), (3,1), (3,6), (4,1), (4,6) \qquad (14)$$

ودر نتیجه گروههای زیر بدست می آیند.

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^7=1, ab=ba, ac=ca, bc=cb> \cong Z_{۱۴۰}=G_{۱} \qquad (۱۵)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^7=1, ab=ba, a^{-1}ca=c^{-1}, bc=cb> \cong <b \mid b^{۵}=1> \times$$
$$< a,c \mid a^{۴}=c^7=1, a^2c=ca^2, a^{-1}ca=c^{-1} = <b \mid b^{۵}=1> \times <a,e \mid a^{۴}=e^{14}=1, a^2=e^7, a^{-1}ea=e^{-1}, e=a^2c>$$

$$\cong Z_{۵} \times Q_{۲۸} = G_{۹} \qquad (16)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^7=1, a^{-1}ba=b^2, ac=ca, bc=cb> \cong <c \mid c^7=1> \times <a,b \mid a^{۴}=b^{۵}=1, a^{-1}ba=b^2>$$

$$\cong Z_7 \times E_{20}=G_7 \qquad (۱۷)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^{۷}=1, a^{-1}ba=b^2, a^{-1}ca=c^{-1}, bc=cb>=<a,d \mid a^{۴}=d^{۳۵}=1, a^{-1}da=d^{-۸}> =G_3 \qquad (۱۸)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^{۷}=1, a^{-1}ba=b^3, ac=ca, bc=cb>=<c \mid c^{۷}=1> \times <a,b \mid a^{۴}=b^{۵}=1, a^{-1}ba=b^3> \cong G_7 \qquad (19)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^{۷}=1, a^{-1}ba=b^3, a^{-1}ca=c^{-1}, bc=cb \geq <a,d \mid a^{۴}=d^{۳۵}=1, a^{-1}da=d^{13}> =G_6 \qquad (20)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^7=1, a^{-1}ba=b^{-1}, ac=ca, bc=cb> \cong <c \mid c^{۷}=1> \times <a,b \mid a^{۴}=b^{۵}=1, a^{-1}ba=b^{-1}>$$

$$\cong Z_7 \times Q_{20}=G_{10} \qquad (21)$$

$$<a,b,c \mid a^{۴}=b^{۵}=c^7=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, bc=cb> = <a,d \mid a^{۴}=d^{۳۵}=1, a^{-1}da=d^{-1}> =$$

$$<a,f \mid a^{۴}=f^{۷۰}=1, a^2=f^{۳۵}, a^{-1}fa=f^{-1}>=Q_{۱۴۰}=G_{۸} \qquad (22)$$

۲. $H=<x,y \mid x^2=y^2=1, xy=yx>$. چون Aut(K) فقط یک عضو از مرتبه ۲دارد می توان فرض کرد $\varphi_y=I$,$|\varphi_x|=2$ وداریم:

$$\varphi_x:\begin{matrix} b\to b^{-1} \\ c\to c\end{matrix}\quad \varphi_x:\begin{matrix} b\to b \\ c\to c^{-1}\end{matrix}\quad \varphi_x:\begin{matrix} b\to b^{-1} \\ c\to c^{-1}\end{matrix}\quad ,\varphi_y:\begin{matrix} b\to b \\ c\to c\end{matrix} \tag{23}$$

وگروههای زیر بدست می آیند:

$$<x,y,b,c|x^2=y^2=b^5=c^7=1,xy=yx,xb=bx,xc=cx,yb=by,yc=cy>\cong Z_2\times Z_2\times Z_{35}=G_{11} \tag{24}$$

$$<x,y,b,c|x^2=y^2=b^5=c^7=1,xy=yx,xb=b^{-1}x,xc=cx,yb=by,yc=cy>\cong Z_{14}\times D_{10}=G_4 \tag{25}$$

$$<x,y,b,c|x^2=y^2=b^5=c^7=1,xy=yx,xb=bx,xc=c^{-1}x,yb=by,yc=cy>\cong Z_{10}\times D_{14}=G_۵ \tag{۲۶}$$

$$<x,y,b,c|x^2=y^2=b^5=c^7=1,xy=yx,xb=b^{-1}x,xc=c^{-1}x,yb=by,yc=cy>\cong D_{140}=G_2 \tag{۲۷}$$

G_1 دوری است . بنابراین :

$$Z(G_1)=G_1\ ,\ \ |Aut(G_1)|=\varphi(140)=48 \tag{۲۸}$$

با توجه به رابطه (۲.۴) و (۱۲)،

$$Z(G_۲)\cong\mathbb{Z}_۲\,|Aut(G_2|=70\varphi(70)=1680 \tag{۲۹}$$

در G_3 اگر $0\leq i\leq 3$ $a^i\in Z(G)$ در این صورت $a^id = da^i$ ولذا $a^{-i}da^i = d$ ودرنتیجه $d^{(-8)^i-1}=1$ که نتیجه می شود $i =$ 0 واکر $0\leq j\leq 34$ $d^j\in Z(G)$ آنگاه $d^ja=ad^j$ ودر تتیجه $a^{-1}d^ja = d^j$ وخواهیم داشت

وبنابر این $d^{-8j}=d^j$ که نتیجه می شود $d^{-9j} = 1$ ولذا $j = 0$ اگر $ad^j\in Z(G)$ داریم: $ad^ja=a^2d^j$ پس $a^{-1}d^ja=d^j$ یعنی $j =$ 0 وبه همین ترتیب است برای a^2b^j و a^3b^j، بنابر این

$$Z(G_3) = 1. \tag{۳۰}$$

فرض کنیم $\varphi\in Aut(G_3)$، a, d مولد های G_3 هستند به ترتیب از مرتبه های ۳۵و۴ . این گروه ۲۴عضو از مرتبه ۳۵و۷۰ عضو ازنرتبه ۴دارد پس برای $\varphi(a)$ ۷۰ امکان وبرای φ (b) ۲۴حالت وجود دارد در نتیجه :

$$|Aut(G_3)|=70\times 24=1680 \quad (31)$$

وبه همین ترتیب است برای $G_۶$.

باتوجه به رابطه (۲.۴) و (۲.۱۱) داریم:

$$Z(G_4)\cong Z_{14}, Z(G_5)\cong Z_{10}$$

وبا توجه به اینکه

$$G_4\cong Z_7\times D_{20},\ G_۵\cong Z_۵\times D_{28} \quad (32)$$

خواهیم داشت :

$$|Aut(G_4)|=4\times 6\times 10=240,\ |Aut(G_5)|==4\times 14\times 6=336 \quad (33)$$

مانند آنجه در باره $Z(G_3)$ اشاره شد می توان نشان داد<

$$Z(E_{20})=<1> \quad (34)$$

وبنابر این

$$Z(G_7)\cong Z_7 \quad (35)$$

وE_{20}، ۱۰عضو از مرتبه۴و۴عضو از مرتبه ۵دارد ودر نتیجه:

$$|Aut(G_7)|=6\times 10\times 4=240 \quad (36)$$

با توجه به رابطه (۲.۵)

$$Z(G_8)\cong Z_2 \quad (37)$$

ومانند آنچه در مورد G_3 بیان شد،

(۳۸)

$$|Aut(G_8)|=1680$$

باتوجه به(۲.۱۱) و(۲.۱۲) داریم :

$$Z(G_9)\cong Z_{10},\ Z(G_{10})\cong Z_{14}|Aut(G_9)|=4\times 14\times 6=336|Aut(G_{10})|=6\times 10\times 4=240 \quad (39)$$

G_{11}آبلی است. بنابراین،

$Z(G_{11})=G_{11}$ (۴۰)

.

$|Aut(Z_2\times Z_2)|=6$ (41)

وبنابراین:

$|Aut(G_{11})|=۶\times۲۴=۱۴۴$ (۴۲)

وبه این ترتیب اثبات ۳.۱۲کامل می شود. □

نتیجه گیری

ازمرتبه ۷۰، تاحد یکریختی ۴ گروه وجود دارندکه ۲مورد از آنها آبلی و۲مورد غیر آبلی هستند واز مرتبه۱۴۰ ۱۱گروه وجود دارند که ۲مورد آبلی و۹مورد از آنها غیر آبلی می باشند.

تشکر وقدر دانی

بدین وسیله ازکلیه داوران گرامی وکمیته علمی کنفرانس که مقاله ما راموردارزیابی وپدیرش قرار دادند کمال تشکر وقدر دانی را داریم.

مراجع

[۱] م. رضادرفشه, "سیر تکامل نظریه کروهها تارده بندی گروههای ساده متناهی," *فرهنگ واندیشه ریاضی,* pp. ۱۳۵-۱۴۵, بهار وتابستان ۱۳۹۹.

[۲] ع. ر. جمالی, مقدمه ای بر نظریه کروههای متناهی, تهران: مبتکران, ۱۳۸۰.

[3] Gustav Saeden Stahl, Johan Laine and Gustav Behm, On p-groups of low power order, 2010.

[4] H.D.Bender, "A Determinate of the group of order P^5," *Annals of Mathematics,Second Series,* vol. 29, no. 1/4, pp. 61-72, 1927-1928.

[5] Rodney james, "The groups of order p^6(and odd primes)," *Mathematics of Computation,* vol. 34, no. 150, pp. 613-637, 1980.

[6] Michio Suzuki, GroupTheory, New york: Springer-Verlag, 1986.