چهاردهمین دوره کنفرانس بین المللی نظریه گروه های ایران
دانشگاه علم و صنعت ایران
تاریخ: ۱۴ و ۱۵ بهمن ۱۴۰۰

ساخت ابرمدول های تصویری فازی و کوانتومی به کمک ابرگروه های تقارنی روی ابرکره ی فازی و کوانتومی

محمد محمودی[۱]
دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

مهدی لطفی زاده
دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

مدول های تصویری فازی روی کره ی فازی $S_F^{۲}$ ساخته شده است. در این مقاله، ضمن معرفی این مدول ها، تعمیم آنها را به ابرفضاهای فازی و کوانتومی(دگرشکل یافته) انجام خواهیم داد. این کار با استفاده از ابرگروه های تقارنی متناظر با ابرکره های فازی $S_F^{(۲|۲)}$ و کوانتومی $S_{q\mu}^{(۲|۲)}$ انجام خواهد شد.

واژه های کلیدی: ابرگروه های تقارنی، ابرکره های فازی و کوانتومی، ابرمدول های تصویری
طبقه بندی موضوعی:

۱ مقدمه

تقارن در فیزیک نقشی اساسی و مهم دارد؛ شاید یکی از مهمترین دلایل این اهمیت، قضیه ی نوتر باشد که اشاره به این دارد که: «به ازای هر نوع تقارن از سیستم، کمیتی پایسته(نسبت به زمان) و متناظر با آن، وجود دارد.» به عنوان مثال، فرض بر همگنی در زمان، منجر به پایسته شدن انرژی کل سیستم می شود. به جرات می توان گفت که، تقریبا حوزه ای از فیزیک وجود ندارد که نظریه ی گروه در آن رخنه نکرده باشد. کاربرد وسیع آن در نظریه های مختلف فیزیکی از جمله در فیزیک نظری، «به دلیل تقارن اساسی فضا–زمان مینکوفسکی $M_۴$ به عنوان یک فضا–زمان تخت از یک فضا–زمان خمیده ی لورنتسی با گروه تقارنی پوانکاره»، نظریه ی میدان های کوانتومی، «به دلیل محاسبه ی طیف انرژی سیستم به کمک تعریف عملگر کازیمیر متناظر با گروه تقارنی سیستم در فضای فوک یا هیلبرت متناظر با سیستم»، نظریه های ریسمان و ابرریسمان، «به دلیل تقارن ها و ابر تقارن های حاکم بر ریسمان ها به همراه جبرهای ویراسورو و ابرویراسورو»، نظریه های میدان های همدیس، «به دلیل حاکم بودن تبدیلات همدیس وایل»، نظریه های پیمانه ای، «به دلیل وجود تقارنهای داخلی سیستم»، فیزیک ذرات «که باور بر این است که می توان همه ی ذرات شناخته شده در فیزیک را به کمک گروه، طبقه بندی کرد.» و ... به همراه نظریه های مختلف نمایش که برای بیان چگونگی کنش روی سیستم ها استفاده می شوند؛ از جمله دلایل دیگر اهمیت گروه، در فیزیک است.

در چند دهه ی گذشته، شاهد این بوده ایم که پیشرفت های موجود در فیزیک، مخصوصا فیزیک نظری، به صورت انواع تقارن ها، الگوها و انواع شکست های تقارنی، فرمول بندی شده اند. با این حال رفته رفته، به منظور تحلیل و بررسی مسائل بنیادی، پیشرفته و پیچیده در فیزیک، نیاز به تعمیم های مختلف و توسعه ی بیشتر مفاهیم تقارن وجود دارد؛ از آن جمله می توان به ابرتبدیلات(ابرگروه ها و ابرجبرهای لی)، جبرهای کوانتومی(گروه های کوانتومی)، تبدیلات موضعی(تبدیلات پیمانه ای) و جبرهای لی نامتناهی اشاره کرد. در این مقاله، ضمن معرفی مختصری از دو مورد تقارن اخیر، کاربردی از آنها را در ساخت ابرمدول های تصویری فازی و کوانتومی ارائه خواهیم داد.

[۱] سخنران

ایده ی مربوط به ابرفضاها یا ابرمنیفلدها، به طور تلویحی در سال ۱۹۵۹میلادی توسط مارتین[۱] که به دنبال تعمیم دینامیک کلاسیکی بود، مطرح شد؛ که در آن دینامیک کلاسیکی، توصیف کننده ی حالت های یک سیستم فیزیکی به عنوان نقاطی از یک فضای پیکربندی مشخص از یک منیفلد هموار M، است. به مرور و پس از معرفی مدل استاندارد ذرات، مردم به این فکر افتادند که همین ایده را برای یکپارچه سازی توصیف ذرات فرمیونی و ذرات بوزونی در یک فضای واحد، به اسم ابرفضا(Z_2-مدرج)، نیز انجام دهند. از لحاظ ریاضیاتی این کار معادل است با اتصال متغییرهای مرسوم جابجا شونده ی(بوزونی) با متغییرهای پادجابجا شونده ی(فرمیونی) در یک فضای بزرگتر و واحد[۲]. تقارن این ابرفضا، ابرتقارن نام دارد که در فیزیک، نسخه ی ابر، برای فضا-زمان مینکوفسکی، ابرفضا-زمان به همراه ابرگروه پوانکاره نام دارد؛ که این ابرگروه، شامل همه ی تبدیلات گروه پوانکاره به عنوان تقارن های خارجی سیستم و تبدیلات پیمانه ای مناسب به عنوان تقارنی داخلی سیستم است. همچنین باید اشاره کرد که از اولین نظریه های میدان متناظر با ابرجبر پوانکاره برای این ابرفضا، مدل وس-زومینو می باشد که شامل میدان های اسکالر، شبه اسکالر و اسپینوری که همگی دارای جرم یکسان هستند، می باشد[۳]. در فیزیک بنا به دلایل احتمالاتی و در ریاضی به عنوان مثالی از گروه های تقارنی فشرده، کره و نسخه ی ابر و کوانتومی آن(کره ی پودلز)[۴] اهمیت بسزایی دارند. در نتیجه در ادامه برای این فضاها، مدول های تصویری که از آنها برای ساخت عملگرهای دیراک و کایرالیتی که برای توصیف ذرات در نظریه ی میدان های کوانتومی استفاده می شود، معرفی خواهند شد[۵-۷].

دومین مفهوم توسعه یافته از تقارن، گروه های کوانتومی هستند؛ که بعد از سال های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ میلادی، ایده ی هندسه ی q-تغییر شکل یافته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. از اولین کارها در این زمینه می توان به تاربندی هوپف q-تغییر شکل یافته در چارچوب توسیع هوپف-گالوا، عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته روی کره ی پودلز کوانتومی[۴] و عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته ی واتامورا-واتامورا D^q_{WW} [۸] اشاره کرد. نظریه ی گروه کوانتومی، نظریه ای است غنی که دربرگیرنده ی حالت های تبهگنی به همراه گروه های لی و جبرهای لی به عنوان یک حالت خاص، که به کمک آن بسیاری از مفاهیم فیزیکی از جمله تقارن های فضا-زمانی، تقارن های پیمانه ای، انواع مختلف از تقارن های دینامیکی و ... قابل توصیف است. گروه کوانتومی، موجودات جبری تعمیم یافته ای هستند که منشا آنها از لحاظ ریاضیاتی به تجرید از ساختارهای توسعه داده شده در چارچوب پراکندگی معکوس که روشی برای حل مدل های کوانتومی انتگرال پذیر است، بر می گردد. لازم به ذکر است که روش پراکندگی معکوس موضوع بسیار وسیعی است که نمی توان آن را فقط به گروه های کوانتومی محدود کرد؛ با این حال، بیشترین کاربرد گروه های کوانتومی در نظریه ی سیستم های انتگرال پذیر است. در حال حاضر، گروه های کوانتومی و در یک مفهوم کلی تر، هندسه ی غیرجابجایی به موضوعی عظیم و همه کاره در فیزیک مدرن کنونی تبدیل شده است؛ به طوری که می توان از شاخه های مختلف فیزیک که این جبرهای کوانتومی در آنجا نقش حیاتی ایفا می کنند به: توصیف زنجیره های اسپینی، توصیف آنیون ها، کاربردهای وسیع در اپتیک کوانتومی، توصیف دوران ها و ارتعاشات مولکولی، نظریه های میدان همدیس و ... اشاره کرد[۹]. از نقطه نظر ریاضیاتی، فرآیند استخراج گروه های کوانتومی از گروه های کلاسیکی تا حد زیادی مشابه با شیوه ی کوانتش سیستم های کلاسیکی است[۱۰]. در واقع این فرآیند یک تعمیم بسیار غیربدیهی از کوانتش معمولی است که در آن ویژگی های توپولوژیکی و هندسی یک منیفلد گروهی به همراه ساختار گروهی روی آن، در نظر گرفته می شود. به یک معنا، نقش هندسه ی ناجابجایی و گروه های کوانتومی در مکانیک کوانتومی، مشابه نقشی است که هندسه دیفرانسیل معمولی و گروه های لی در نسبیت عام اینشتین ایفا می کنند. هر دوی مفاهیم مذکور چنان فرمالیسم طبیعی برای توصیف پدیده های فیزیکی ارائه می دهند که در اصل تمایز بین «هندسه» و «فیزیک» از بین می رود و از «دینامیک هندسی» یا «فیزیک هندسی» صحبت می شود. در نتیجه می توان گفت که یک گام اساسی جهت هندسی سازی پدیده های کوانتومی، معرفی گروه های کوانتومی بوده است. بدیهی است که به دلیل معرفی مفهوم تقارنی جدید(گروه های کوانتومی)، می توان حد کلاسیکی متفاوت و مستقل از ثابت پلانک $\hbar$ را تعریف کرد که با پارامتر q نشان داده می شود و به صورت $q \longrightarrow 1$ می باشد. در انتها اشاره ای به رهیافت های متفاوت، که برای ساختن گروه های کوانتومی وجود دارند، می شود، که عبارتند از:

- رهیافت درینفلد[۱۱]؛ که مبتنی است بر تغییر شکل ساختار پواسنی یک گروه.
- رهیافت R-ماتریس فادوو-رشتیخین-تخته جان[۱۲]؛ که به نوعی دوگان با رهیافت درینفلد است.
- رهیافت مانین[۱۳و۱۴]؛ که در آن موجود اولیه یک جبر درجه ی دوم روی فضاهای خطی کوانتومی است.
- رهیافت ورونوویچ[۱۵-۱۷]؛ با پس زمینه ای اساسا متفاوت با نظریه ی جبری $\mathbb{C}^*$.

از میان این رهیافت ها، سه رهیافت اول خیلی نزدیک بهم و مکمل همدیگر هستند و رهیافت آخر با اتکای به قضیه ی گلفاند-نایمارک، نزدیک به فرض های تعمیم یافته ی کُن در مورد هندسه ی ناجابجایی است[۱۸].

۲ مدول های تصویری

در این قسمت ساختار ریاضیاتی مدول های تصویری متناسب با اهداف مقاله، ارائه می شود تا به کمک آن بتوان، راحت تر تعمیم مدول های تصویری را به ابرفضاها انجام داد. اساس این تعمیم متکی بر قضایای گلفاند-نایمارک و سر-سوآن[۱۹] است. طبق قضیه ی گلفاند-نایمارک، «هر جبر $\mathbb{C}^*$ جابجایی با عضو یکدار، با جبر همه ی توابع پیوسته روی یک منیفلد توپولوژیکی فشرده و مشخص، یکریخت است.» در واقع به دلیل بی معنا

بودن مفهوم نقطه در هندسه ی ناجابجایی، از جبر توابع تعریف شده روی این فضاها برای مطالعه ی خود فضا، استفاده می شود؛ از طرفی، تعمیم از فضای جابجایی به فضای ناجابجایی به کمک همین جبر توابع تعریف شده روی این فضاها، خیلی راحت تر است. این کار همان شگرد کُن، برای ناجابجایی کردن فضا از طریق ناجابجایی کردن جبر توابع پیوسته روی آن فضا می باشد که ما نیز در این مقاله از آن بهره برده ایم. لازم به ذکر است که به عنوان یک رهیافتی دیگر، با جانشانی مدول های تصویری متناهی به جای کلاف های برداری، نیز می شود به هندسه ی ناجابجایی رسید؛ اساس این جانشانی بر مبنای قضیه ی سر-سوآن است که بیان می دارد «یک هم ارزی بین رسته ی کلاف های برداری روی یک منیفلد فشرده ی M، با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر جابجایی از توابع هموار $C(M)$ روی M وجود دارد.»

۱.۲ مدول های آزاد، مدول های تصویری

در ابتدا مفهوم مدول های آزاد و تصویری معرفی می شود. برای این منظور، $Mat(N+۱) = Mat(۲L+۱)$ را به عنوان یک فضای برداری، در نظر می گیریم که حامل نمایش های منظم راست و چپ جبر فازی(ناجابجایی) است. در نتیجه، به ازای هر $a, b \in Mat(۲L+۱)$ ، دو عملگر a^R و a^L که روی $Mat(۲L+۱)$ کنش می کند، وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a^R b = ba, \quad a^L b = ab \tag{۱}$$

با $a^L b^L = (ab)^L$ و $a^R b^R = (ba)^R$.

یک مدول V برای یک جبری مثل $\mathcal{A}$، یک فضای برداری است که حامل نمایش آن جبر است؛ و یک دو مدول است هرگاه دو نوع کنش متفاوت از جبری مثل $\mathcal{A}$ داشته باشیم. در نتیجه در مثال فوق، $V = Mat(۲L+۱)$ یک دو مدول برای جبر $\mathcal{A}$ است که ترکیبات خطی از بردارها در V، ضرایبشان را از $\mathcal{A}$ می گیرند. در حالت کلی، یک $\mathcal{A}$-مدول V آزاد گفته می شود هرگاه دارای پایه ی $\{e_i\}, e_i \in V$ باشد. در این صورت، هر $x \in V$ را می توان به شکل منحصر به فرد $\sum a_i e_i$ نوشت. یک کلاس از دو مدول های آزاد $V = Mat(N+۱)$ را می توان به صورت $V \otimes \mathbb{C}^K \equiv V^K$ ساخت که در آن اعضای V^K به صورت $v_i \in V, v \doteq (v_۱, ..., v_K)$ می باشند.

یک تصویرگر P روی $\mathcal{A}$ -مدول V^K، یک ماتریس $K \times K$ به صورت $P = (P_{ij})$ است با درایه های $P_{ij} \in \mathcal{A}$؛ که در شروط زیر صدق می کند:

$$P^\dagger = P, \quad P^۲ = P \tag{۲}$$

در نتیجه هر بردار در PV^K را می توان به صورت ترکیب خطی از Pe_i با ضرایبی از جبر $\mathcal{A}$ نوشت. بدین ترتیب، PV^K یک مثال از مدول تصویری است. در نتیجه بدیهی است که بنویسیم:

$$V^K = PV^K \oplus (۱-P)V^K \tag{۳}$$

یک مدول را که چه تصویری باشد و چه هر چیز دیگری، بدیهی گویند هرگاه یک مدول آزاد باشد.

۲.۲ مدول های تصویری روی $\mathcal{A} = C^\infty(S^۲)$

ایده ی مذکور در قسمت قبل، برای هر جبری مثل $\mathcal{A}$ و یک $\mathcal{A}$-مدول V، معتبر است. می توان نشان داد که اعضای $\mathcal{A}$-مدول، مقاطع کلاف های روی M هستند که در اینجا ما آن را به صورت $M = S^۲ = SU(۲)/U(۱)$ بر می داریم. در این حالت، مقاطع یک کلاف تاری پیچانده شده روی $S^۲$، همچو $U(۱)$-کلاف، (اعضای) مدول های تصویری غیربدیهی هستند؛ که طبق قضیه ی سر-سوآن، می توان آنها را با مدول های تصویری جایگزین کرد. مدول آزاد $\mathcal{A}^۲ = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^۲$ را در نظر می گیریم. اگر $\hat{x}$ تابع مختصاتی باشد، به این صورت که $a \in \mathcal{A}, (\hat{x}_i a)(x) = x_i a(x)$؛ می توان تصویرگر زیر را برای این مدول آزاد در نظر گرفت:

$$P_\pm = \frac{۱ \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{۲} \tag{۴}$$

که در آن، σ_i معرف ماتریس های پاولی است. مختصات x_i نیز، معرف نقاط روی کره $S^۲$ با انحنای مثبت که در فضای تخت اقلیدسی با متریک $\eta^{ij} = diag(۱,۱,۱)$ نشانده شده است، می باشند:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = x_i \eta^{ij} x_j = ۱ \tag{۵}$$

بدین ترتیب، $P_\pm \mathcal{A}^۲$ یک مدول تصویری برای سیستم اسپین $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

۳.۲ مدول های تصویری روی $\mathcal{A} = C^\infty(S_F^2)$

نسخه ی فازی مدول تصویری ساخته شده در بالا را می توان با ناجابجایی ساختن جبر توابع حاکم بر آن، بدست آورد. برای این منظور، کافی است متغییرهای جابجایی فضا x_i را با عملگرهای متناظر جایگزین کنیم؛ در این حالت، به جبر $su(2)$ خواهیم رسید:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \tag{۶}$$

روی $\mathbb{C}^2$، نمایش اسپین $\frac{1}{2}$ از $SU(2)$ با مولدهای $\frac{\sigma_i}{2}$ کنش می کند و روی S_F^2، نمایش اسپین l از $SU(2)$ با مولدهای ${L_i}^L$ از چپ و یا ${L_i}^R$ از راست کنش خواهد کرد. در این حالت، در فضای مدول تصویری فازی $P^{F,L}_{(l\pm\frac{1}{2})}(S_F^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ و یا $P^{F,R}_{(l\pm\frac{1}{2})}(S_F^2 \otimes \mathbb{C}^2)$، جفت شدگی اسپین های ذاتی و مداری را خواهیم داشت که در تصویرگرهای فازی $P^{F,L}_{(l\pm\frac{1}{2})}$ و یا $P^{F,R}_{(l\pm\frac{1}{2})}$ خود را نشان می دهد[۲۰]:

$$P^{L,F}_{(l-\frac{1}{2})} = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{L}^L - l}{2l+1}, \quad P^{L,F}_{(l+\frac{1}{2})} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{L}^L + l + 1}{2l+1} \tag{۷}$$

تصویرگرهای راست را نیز می توان با اعمال $\vec{L}^L \rightarrow -\vec{L}^R$ بدست آورد. بدیهی است که تحت اصل تطابق، تصویرگرهای (۷)، به تصویرگرهای (۴) تبدیل خواهند شد. برای این منظور، حد کلاسیکی معادل است با $l \longrightarrow \infty$؛ که تحت آن:

$$x_i = \lim_{l\to\infty} \frac{L_i^L, L_i^R}{l} \tag{۸}$$

۳ ابرمدول های تصویری فازی

به منظور معرفی ابرمدول های تصویری روی ابرکره ی فازی $S_F^{(2|2)}$، نیاز است تا در ابتدا این ابرفضا را معرفی کنیم. ابرفضای $R^{(3|2)}$ به عنوان جبر چندجمله ای هایی با مولدهای x_i و θ_α به همراه معادله ی توصیف کننده ی مدار الحاقی $S^{(2|2)}$ از $UOSp(2|1)$ که در شرایط زیر صدق می کنند، تعریف می شود:

$$x_i^\ddagger = x_i, \quad \theta_\alpha^\ddagger = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\beta, \quad S^{(2|2)} = \langle (x_i, \theta_\alpha) \in R^{(3|2)} \quad | \quad x_i x_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = 1 \rangle \tag{۹}$$

فرض می کنیم $X_i = \mu L_i$ و $\Theta_\alpha = \mu L_\alpha$ که μ توسط رابطه ی زیر تعیین می شود:

$$\frac{1}{\mu^2} = C_{uosp(2|1)} = l(l+\frac{1}{2}), \quad X_i = \frac{L_i}{\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}}, \quad \Theta_\alpha = \frac{L_\alpha}{\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}} \tag{۱۰}$$

که در جبر $uosp(2|1)$ به صورت زیر صدق می کنند:

$$[X_i, X_j] = \frac{i\varepsilon_{ijk}}{\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}} X_k, \quad [X_i, \Theta_\alpha] = \frac{(\sigma_i)_{\beta\alpha}}{2\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}}\Theta_\beta, \quad \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\} = \frac{(\varepsilon\sigma_i)_{\alpha\beta}}{2\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}} L_i \tag{۱۱}$$

همچنین این مختصات در رابطه ی زیر که معادله ی ابرکره ی فازی $S_F^{(2|2)}$ را مشخص می کند، صدق می کنند:

$$X_i X_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\Theta_\alpha\Theta_\beta = 1 \tag{۱۲}$$

طبیعتا مختصات (x_i, θ_α) که برای ابرکره ی جابجایی $S^{(2|2)}$ بودند، در حالت حدی از مختصات ناجابجایی مذکور به صورت زیر، قابل بدست آمدن هستند:

$$x_i = \lim_{l\to\infty} \frac{L_i^{L,R}}{\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}} = \lim_{l\to\infty} \frac{L_i^{L,R}}{l}, \quad \theta_\alpha = \lim_{l\to\infty} \frac{L_\alpha^{L,R}}{\sqrt{l(l+\frac{1}{2})}} = \lim_{l\to\infty} \frac{L_\alpha^{L,R}}{l} \tag{۱۳}$$

در تاربندی هوپف $S^{(3|2)} \xrightarrow{U(1)} S^{(2|2)}$، مقاطع به صورت $\Gamma^\infty(S^{(2|2)}, E^{(n)})$ با $G(S^{(2|2)})$–مدول است که در آن $G(S^{(2|2)})$، جبر جابجایی ابرتوابع روی ابرکره ی $S^{(2|2)}$ می باشد. در مدل فازی، این جبر، جبری ناجابجایی است؛ در نتیجه، مدول های راست و چپ، با هم

یکریخت نخواهند بود. در این حالت برای هر عملگر تکانه ی زاویه ای $\mathbf{L}=(L_i,L_\alpha)$، دو عملگر خطی $\mathbf{L}^L$ و $\mathbf{L}^R$ که در واقع نقش کنش های راست و چپ روی ابرجبر ماتریسی الحاقی فازی $\mathcal{A}_l=\{\psi\in M_{۴l+۱}(C_L)\}$ را دارند، وابسته می کنیم:

$$L_i^L\psi=L_i\psi,\quad L_i^R\psi=\psi L_i,\quad L_\alpha^L\psi=L_\alpha\psi,\quad L_\alpha^R\psi=\psi L_\alpha,\quad \forall\psi\in\mathcal{A}_l \tag{۱۴}$$

که کنش راست در جبر $uosp(۲|۱)$ با علامت منفی $(-L_i^R,-L_\alpha^R)$ صدق می کند. این عملگرهای راست و چپ با هم طبق روابط جابجاگری زیر، جابجا می شوند:

$$[L_i^L,L_j^R]=۰,\quad [L_\alpha^L,L_\beta^R]=۰ \tag{۱۵}$$

$\mathbf{L}^L$ و $\mathbf{L}^R$ هر دو دارای جبر یکسان $uosp(۲|۱)$ و طبیعتا یک نوع عملگر کازیمیر $C_{uosp(۲|۱)}$ هستند:

$$C_{uosp(۲|۱)}\equiv\mathbf{L}^L\cdot\mathbf{L}^L=\mathbf{L}^R\cdot\mathbf{L}^R=l(l+\frac{۱}{۲})۱ \tag{۱۶}$$

$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ را به صورت کنش الحاقی L_i و L_α روی $\mathcal{A}_l$ تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}_i\psi=(L_i^L-L_i^R)\psi=ad_{L_i}\psi=[L_i,\psi],\qquad \mathcal{L}_\alpha\psi=(L_\alpha^L-L_\alpha^R)\psi=ad_{L_\alpha}\psi=[L_\alpha,\psi] \tag{۱۷}$$

ماتریس های پاولی جبرلی $su(۲)$ را با $\sigma_۱,\sigma_۲,\sigma_۳$ نشان می دهیم. بدین ترتیب، می توان نسخه ی ابر این ماتریس ها را به عنوان نمایش اساسی ابراسپین $\frac{۱}{۲}$ جبر $uosp(۲|۱)$ تعریف کرد:

$$\Sigma_i=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\sigma_i & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix},\quad \Sigma_\alpha=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۰ & \tau_\alpha\\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & ۰\end{pmatrix} \tag{۱۸}$$

با $\varepsilon=i\sigma_۲,\tau_۱=(۱,۰)^t$ و $\tau_۲=(۰,۱)^t$.

حال، ساختار ابرکلاف تاری زیر با ابرفضای کل $S_F^{(۳|۲)}\cong UOSp(۲|۱)$ را که در آن $S_F^{(۲|۲)}$ ابرکره ای با بعد $(۲|۲)$ به عنوان ابرمنیفلد پایه، که به نوعی ابرمنیفلد دی ویت[۲] با بادی[۳] $S_F^۲$ است، را در نظر می گیریم:

$$U(۱)\xrightarrow{rightU(۱)-action}S_F^{(۳|۲)}\xrightarrow{\pi}S_F^{(۲|۲)} \tag{۱۹}$$

ابرگروه تقارنی ابرفضای کل $S_F^{(۳|۲)}$، $UOSp(۲|۱)$ با بعد $(۱|۲)$ و ساختار ابرگروهی $U(۱)$ می باشد. جبر $uosp(۲|۱)$ شامل جبر $su(۲)$ به عنوان بیشینه زیر جبر بوزونی و متشکل از پنج مولد، که سه تای آنها $L_i(i=۱,۲,۳)$ برای بوزون ها و دوتای دیگه $L_\alpha(\alpha=+,-)$ برای فرمیون ها است، می باشد. این مولدها رابطه های جابجاگری زیر را با هم دارند:

$$[L_i,L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k,\quad [L_i,L_\alpha]=\frac{۱}{۲}(\sigma_i)_{\beta\alpha}L_\beta,\quad \{L_\alpha,L_\beta\}=\frac{۱}{۲}(\varepsilon\sigma_i)_{\alpha\beta}L_i \tag{۲۰}$$

که $\varepsilon=i\sigma_۲$. قسمت زوج این جبر$su(۲)$ است که توسط مولدهای L_i و قسمت فرد آن نیز توسط مولدهای L_α که در واقع اسپینورهای $su(۲)$ هستند، تولید می شود. نمایش های کاهش ناپذیر جبر $uosp(۲|۱)$ توسط عملگر کازیمیر زیر توصیف می شود:

$$C_{uosp(۲|۱)}=L_iL_i+\epsilon_{\alpha\beta}L_\alpha L_\beta \tag{۲۱}$$

این عملگر دارای ویژه مقدار $l(l+\frac{۱}{۲})$ است که l معرف ابراسپین با $l=۰,\frac{۱}{۲},۱,\ldots$. L_i و L_α ابرالحاقی هستند، بدان معنا که:

$$L_i^\ddagger=L_i^\dagger=L_i,\quad L_\alpha^\ddagger=L_\alpha \tag{۲۲}$$

که $\ddagger$ معرف ابرالحاقی است. فرض می کنیم $A_{C_L}=G^\infty(S_F^{(۲|۲)},C_L)$ و $B_{C_L}=G^\infty(S_F^{(۳|۲)},C_L)$ به ترتیب نشان دهنده ی جبرهای مدرج C_Lـمقداره ی توابع روی ابرمنیفلد $S_F^{(۳|۲)}$ و ابرمنیفلد پایه ی $S_F^{(۲|۲)}$ که تحت ضرب نقطه به نقطه هموار هستند، باشد. در اینجا، C_L نشان دهنده ی جبر گراسمن مختلط با L مولد است. مشابه با گروه $U(۱)$، نمایش های کاهش ناپذیر ابرگروه $U(۱)$ با عدد صحیح n برچسب می خورند. اعضای B_{C_L} را می توان به صورت مدول های راست کلاسه بندی کرد؛ یعنی: $(\forall p\in S_F^{(۳|۲)},\forall\omega\in U(۱))$

$$C^\infty_{(\pm n)}(S_F^{(۳|۲)},C_L)=\{\varphi_{(\pm n)}:S_F^{(۳|۲)}\to C_L,\quad \varphi_{(\pm n)}(p\cdot\omega)=\omega^{(\pm n)}\cdot\varphi(p)\} \tag{۲۳}$$

[۲] DeWitt
[۳] Body

کنش های چپ ابرگروه $U(1)$ روی C_L با n برچسب می خورند؛ که در واقع این کنش ها توصیف کننده ی یک کلاف هستند. طبق قضیه ی سر-سوآن، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با این کلاف ها، ابرتصویرگرهای P_n وجود دارد؛ به طوری که برای ابرکلاف برداری وابسته شان خواهیم داشت:

$$E^{(n)} = S_F^{(3|2)} \times_{U(1)} C_L \xrightarrow{\pi} S_F^{(2|2)} \tag{24}$$

A_{C_L}-مدول راست مقاطع $\Gamma^\infty(S_F^{(2|2)}, E^{(n)})$ که یکریخت با $G^\infty_{(n)}(S_F^{(3|2)}, C_L)$ می باشد؛ خود هم ارز است با تصویر در مدول آزاد $(A_{C_L})^{(2n+1)} = G^\infty(S_F^{(2|2)}, C_L) \otimes C_L^{2n+1}$ از یک ابرتصویرگر P_n که $\Gamma^\infty(S_F^{(2|2)}, E^{(n)}) = P_n(A_{C_L})^{2n+1}$. ابرتصویرگر P_n یک ابرعملگر هرمیتی با ابررتبه ی ۱ روی C_L است:

$$P_n \in M_{2n+1}(A_{C_L}), \quad P_n^2 = P_n, \quad P_n^\ddagger = P_n, \quad StrP_n = 1 \tag{25}$$

که در آن Str، ابررد و ۱، ابرتابع ثابت است. برای $A_{\mathbb{C}}$-مدول راست از مقاطع $\Gamma^\infty(S_F^{(2|2)}, E^{(n)})$، $n+1$ ابرتصویرگر $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ با رتبه ی یکسان ۱ وجود دارد. بنابراین مدول آزاد $(A_{C_L})^{2n+1}$ را می توان به صورت زیر، از جمع مستقیم تصویرگرهای A_{C_L}-مدول نوشت:

$$(A_{C_L})^{2n+1} = \bigoplus_{i=1}^{2n+1} P_i (A_{C_L})^{2n+1} \tag{26}$$

می توان نشان داد که در آن ابرتصویرگرها به صورت زیر می باشند:

$$P^R_{(l\pm\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}[1 \mp \frac{2\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{L}^R - 1}{\sqrt{4l(l+\frac{1}{2})+1}}], \qquad P^L_{(l\pm\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}[1 \pm \frac{2\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{L}^L + 1}{\sqrt{4l(l+\frac{1}{2})+1}}], \quad \mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{X} = \Sigma_i X_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\Theta_\beta \tag{27}$$

۴ ابرمدول های تصویری کوانتومی

بعد از معرفی مدول های تصویری و نسخه ی ابر فازی آنها، می توان نسخه ی کوانتومی این مدول های تصویری را ارئه داد. مشابه با حالت فازی، ضروری است تا در ابتدا فضای کوانتومی معرفی و سپس تعمیم انجام شود. برای این منظور، در ابتدا q-عدد برای n را تعریف کنیم[۲۱]:

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{28}$$

برای ابرکره ی کوانتومی فازی $S_{q\mu}^{(2|2)}$، مولدهای جبر مختصاتی $A(S_{q\mu}^{(2|2)})$ آن را با $X_+, X_-, X_\circ, \Theta_+, \Theta_-$ نشان خواهیم داد که به صورت زیر تعریف می شوند و در روابط جابجایی داده شده صدق می کنند:

$$X_i = \frac{[2]_q L_i}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q}}, \Theta_\alpha = \frac{[2]_q L_\alpha}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q}}, \quad \mathbf{X}_+\mathbf{X}_- - \mathbf{X}_-\mathbf{X}_+ = \mu\mathbf{X}_\circ - (q-q^{-1})X_\circ^2, \quad [\mathbf{X}_\circ, \mathbf{X}_\pm]_q = \pm\mu\mathbf{X}_\pm \tag{29}$$

همچنین ابرکره ی کوانتومی فازی نیز با رابطه ی زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \sum_{\circ,\pm} q^m X_{-m}X_m + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = X_\circ^2 + qX_-X_+ + q^{-1}X_+X_- + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = 1 \tag{30}$$

$UOSp_q(2|1)$ تقارن این ابرکره ی کوانتومی $S_{q\mu}^{(2|2)}$ است که ابرجبر آن $U_q(uosp(2|1)) = uosp_q(2|1)$ یک جبر Z_2-مدرج یکدار و شرکت پذیر است که توسط عضو زوج $L_\circ$ و عضوهای فرد $L_\pm$ ایجاد می شود:

$$[L_\circ, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [2L_\circ]_{q^{\frac{1}{2}}} \tag{31}$$

$uosp_q(2|1)$ را می توان با اضافه کردن این ولوشن مدرج E به مجموعه ی مولدها مشخص کرد؛ در نتیجه ابرجبر کوانتومی $uosp_q(2|1)$ در روابط زیر صدق خواهند کرد:

$$[L_\circ, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [2L_\circ]_{q^{\frac{1}{2}}}, \quad \{E, L_\pm\} = \circ, \quad [E, L_\circ] = \circ, \quad E^2 = 1 \tag{32}$$

که این روابط با معرفی مولدهای جدید $K = q^{L_\circ}$ و $K^{-۱} = q^{-L_\circ}$، تبدیل به روابط زیر می شوند:

$$KL_+K^{-۱} = qL_+, \quad KL_-K^{-۱} = q^{-۱}L_-, \quad KK^{-۱} = ۱, \quad E^۲ = ۱,$$

$$[K,E] = \circ, \quad [K^{-۱},E] = \circ, \quad \{L_\pm, E\} = \circ, \quad \{L_+, L_-\} = \frac{K - K^{-۱}}{q^{\frac{۱}{۲}} - q^{\frac{-۱}{۲}}} \qquad (۳۳)$$

عملگر کازیمیر $C_{uosp_q(۲|۱)}$ که با همه ی مولدهای رابطه ی (۳۲) جابجا می شود و دارای ویژه مقدار $\frac{[۲l]_q[۲l+۱]_q}{[۲]_q^۲}$ است که در حد ۱ $\to q$ به ویژه مقدار غیر تغییر شکل یافته ی خود، یعنی، $l(l+\frac{۱}{۲})$ تقلیل می یابد، دارای شکل زیر است:

$$C_{uosp_q(۲|۱)} = (L_+L_- - [L_\circ - \frac{۱}{۲}]_q)E \qquad (۳۴)$$

با معرفی نگاشت های هم ضرب $\Delta : uosp_q(۲|۱) \to uosp_q(۲|۱) \otimes uosp_q(۲|۱)$ و هم یکه ی $\epsilon : uosp_q(۲|۱) \to C$ و هم وارون $\sigma : uosp_q(۲|۱) \to uosp_q(۲|۱)$، ساختار جبر هوپف $uosp_q(۲|۱)$ توسط روابط زیر داده می شود:

$$\Delta(L_+) = L_+ \otimes KE + ۱ \otimes L_+, \quad \Delta(L_-) = L_- \otimes E + K^{-۱} \otimes L_-,$$

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes E, \quad \epsilon(E) = ۱, \quad \epsilon(K) = ۱, \quad \epsilon(L_\pm) = \circ,$$

$$\sigma(E) = E, \quad \sigma(K) = K^{-۱}, \quad \sigma(L_+) = -L_+K^{-۱}E, \quad \sigma(L_-) = -KL_-E \qquad (۳۵)$$

در ابرکره ی کوانتومی فازی $S_{q\mu}^{(۲|۲)}$ دو پارامتر حقیقی متفاوت q و μ داریم. در نتیجه حالت های حدی متفاوت زیر را خواهیم داشت:

- اولین حد($q \longrightarrow ۱$ سپس $\mu \longrightarrow \circ$): $S_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow S_\mu^{(۲|۲)} \longrightarrow S^{(۲|۲)}$
- دومین حد($\mu \longrightarrow \circ$ سپس $q \longrightarrow ۱$): $S_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow S_q^{(۲|۲)} \longrightarrow S^{(۲|۲)}$
- سومین حد(به طور همزمان $\mu \longrightarrow \circ$ و $q \longrightarrow ۱$): $S_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow S^{(۲|۲)}$

که در آن μ_q به صورت زیر تعریف می شود که در حد $q \longrightarrow ۱$ به مقدار غیر تبدیل یافته ی متناظرش از $\frac{۱}{\mu^۲} = C_{uosp(۲|۱)} = l(l+\frac{۱}{۲})$، یعنی، $\frac{۱}{\sqrt{l(l+\frac{۱}{۲})}}$ تقلیل می یابد:

$$\mu_q \equiv \frac{[۲]_q}{\sqrt{[۲l]_q[۲l+۱]}} \qquad (۳۶)$$

در سومین حد، رابطه ی (۳۰)، تبدیل به رابطه ی آشنای ابرکره ی $S^{(۲|۲)}$ می شود:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_ix_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = ۱ \qquad (۳۷)$$

همچنین نسخه ی q-تغییر شکل یافته ی ماتریس های پاولی $\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳$ جبر $su(۲)$ نیز به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\sigma_۱^q = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\sigma_۱ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} \circ & i \\ i & \circ \end{pmatrix}, \qquad \sigma_۲^q = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\sigma_۲ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{pmatrix}, \qquad \sigma_۳^q = \begin{pmatrix} q & \circ \\ \circ & -q^{-۱} \end{pmatrix} \qquad (۳۸)$$

نسخه ی ابر این ماتریس ها نیز به قرار زیر تعریف می شوند، که در آن $\tau_۱ = (۱,\circ)^t$ و $\varepsilon = i\sigma_۲^q$، $\tau_۲ = (\circ,۱)^t$ است:

$$\Sigma_i^q = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} \sigma_i^q & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha^q = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} \circ & \tau_\alpha \\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & \circ \end{pmatrix} \qquad (۳۹)$$

حال می توان گفت که، ابرکلاف هوپف کوانتومی، یک $U_q(1)$–کلاف بر روی ابرکره ی کوانتومی $S_{q\mu}^{(2|2)}$ است که کره ی استاندارد پودلز S_q^2 به عنوان بادی آن و ابرمنیفلد کوانتومی $S_{q\mu}^{(3|2)}$ نقش منیفلد کل آن را دارد. کره ی S_q^2 یک فضای کوانتومی همگن $SU_q(2)$است. جبرهای مختصاتی مربوط به این ابرکلاف هوپف کوانتومی را با $A(S_{q\mu}^{(3|2)})$ برای فضای کل $S_{q\mu}^{(3|2)}$، $A(S_{q\mu}^{(2|2)})$ برای فضای پایه ی $S_{q\mu}^{(2|2)}$ و $A(U_q(1))$ برای تار $U_q(1)$ نشان خواهیم داد. در نتیجه جبر شمول $A(S_{q\mu}^{(2|2)}) \hookrightarrow A(S_{q\mu}^{(3|2)})$ یک توسیع هوپف–گالوا است که به عنوان یک ابرکلاف هوپف کوانتومی می باشد و طبیعتا یک نسخه ی جبری از اولین ابرتاربندی هوپف کوانتومی $S_{q\mu}^{(3|2)} \xrightarrow{U_q(1)} S_{q\mu}^{(2|2)}$ است؛ کلاف وابسته ی کوانتومی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$E_q^{(n)} := \{x \in A(S_{q\mu}^{(3|2)}) :\ k \cdot x = q^{\frac{n}{2}} x,\ k \in A(U_q(1))\} \qquad (40)$$

به وضوح، هر $E_q^{(n)}$ یک $A(S_{q\mu}^{(2|2)})$–دو–مدول است که معادل است با تصویر در یک مدول آزاد $(A(S_{q\mu}^{(2|2)}))^{2n+1}$ از یک عملگر کوانتومی خودالحاقی $P_q^{(n)}$ در $Mat_{2n+1}(A(S_{q\mu}^{(2|2)}))$ به ازای هر $n \geqslant 0$. در اینجا $E_q^{(n)}$ را با $A(S_{q\mu}^{(2|2)})$ –مدول چپ مقاطع $(A(S_{q\mu}^{(2|2)}))^{2n+1} P_q^{(n)}$ یکی خواهیم گرفت. می توان نشان داد که در آن ابرتصویرگرهای q–تغییر شکل یافته برای ابرمدول های راست و چپ تصویری، به صورت زیر می باشند:($\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{X} = \sum_{m=0,\pm} (q)^m \Sigma_{-m} X_m + \varepsilon_{\alpha\beta} \Sigma_\alpha \Theta_\beta$)

$$P^R_{[l\pm\frac{1}{2}]_q} = \frac{1}{[2]_q}[1 \mp \frac{[2]_q \mathbf{\Sigma}^q \cdot \mathbf{L}^R - 1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q + 1}}], \quad P^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q} = \frac{1}{[2]_q}[1 \pm \frac{[2]_q \mathbf{\Sigma}^q \cdot \mathbf{L}^L + 1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q + 1}}] \qquad (41)$$

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، تعمیمی از مدول های تصویری برای ابرکره ها در دو شکل فازی و کوانتومی که به عنوان مثالی از ابرفضاهای با ابرگروه های تقارنی فشرده هستند، ارائه شد. طبق قضیه ی سر–سوآن، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با این کلاف ها، ابرتصویرگرهای P_n وجود دارد؛ در نتیجه متناظر با این ابرمدول های تصویری، ابرتصویرگرهای P_n را خواهیم داشت که همچنان که مشاهده شد به دلیل ماهیت غیرجابجایی جبرهای حاکم بر فضاهای مورد بحث، ابرمدول های تصویری راست و چپ متفاوت و متناظر با هر ابرمدول تصویری، ابرتصویرگرهای راست و چپ متفاوت خواهیم داشت، که به نوبه ی خود دارای اهمیت فراوانی در فیزیک هستند؛ به عنوان مثال، به کمک آنها می توان عملگرهای دیراک و کایرالیتی را ساخت که در نظریه ی میدان های کوانتومی برای توصیف ذرات به کار می روند.

مراجع

[1] J. L. Martin, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A251** (1959) 536,543.

[2] Philip. Nelson, *Introduction to Supermanifolds*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 3, **No.3** (1988) 585,590.

[3] H. J. W. Muller-Kirsten, A. Wiedemann, *Introduction to Supersymmetry*, (World Scientific Lecture Notes in Physics-Vol. 80, 2010).

[4] P. Podle´s, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987) 193.

[5] A. P. Balachandran and Pramod Padmanabhan, *Spin j Dirac operators on the fuzzy 2-sphere*, JHEP **09** (2009) 120.

[6] H. Grosse and P. Preˇsnajder, *The Dirac operator on the fuzzy sphere*, Lett. Math. Phys. **33** (1995) 171.

[7] M. Mahmoodi and M. Lotfizadeh, *Super Quantum Dirac Operator on The q-deformed Super Fuzzy Sphere*, **52**nd Annual Iranian Mathematics Conference(2021).

[8] A. Pinzul and A. Stern, *Dirac operator on the quantum sphere*, Phys. Lett. B **512** (2001) 217.

[9] D. Bonatsos and C. Daskaloyannis, *QUANTUM GROUPS AND THEIR APPLICATIONS IN NUCLEAR PHYSICS*, Progress in Particle and Nuclear Physics **43** (1999) 537-618.

[10] F. A. Berezin, *Comm. Math. Phys.* **40** (1975) 153.

[11] V. G. Drinfel'd, *in Proc. of the International Congress of Mathematicians*, Berkley, (1986).

[12] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtadjan, *Algebra i Analiz*, **1** (1989) 178.

[13] Y. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Center des Recherches Mathematiques, Montreal (1988).

[14] Yu. I. Manin, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989) 163.

[15] S. L. Woronowicz, *Publ. RIMS* **23** (1987) 117.

[16] S. L. Woronowicz, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 613.

[17] S. L. Woronowicz, *Invent. Math.* **93** (1988) 35.

[18] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academeic Press, New york, (1994).

[19] R. G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Am. Math. Soc. **105** (1962) 264-277.

[20] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan and B. Ydri, *The fermion doubling problem and noncomutative geometry*, Mod. Phys. Lett. A **15** (2000) 1279.

[21] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).

M.Mahmoodi@urmia.ac.ir
M.Lotfizadeh@urmia.ac.ir