



ساخت ابر Λ - شبه مدول های تصویری فازی و کوانتومی به کمک ابرگروه های تقارنی روی ابرهذلولی گون فازی و کوانتومی

محمد محمودی^۱
دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران
مهدی لطفی زاده
دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

Λ -شبه مدول های تصویری فازی روی هذلولی گون فازی AdS_F^2 ساخته شده است. در این مقاله، ضمن معرفی این شبه مدول ها، تعمیم آنها را به ابرفضاهای فازی و کوانتومی (دگرشکل یافته) انجام خواهیم داد. این کار با استفاده از ابرگروه های تقارنی متناظر با ابرهذلولی گون اقلیدسی فازی $EAdS_F^{(2|2)}$ و کوانتومی $EAdS_{\mu}^{(2|2)}$ انجام خواهد شد. واژه های کلیدی: ابرگروه های تقارنی، ابرهذلولی گون فازی و کوانتومی، ابر Λ -شبه-مدول های تصویری طبقه بندی موضوعی:

۱ مقدمه

تقارن در فیزیک نقشی اساسی و مهم دارد؛ شاید یکی از مهمترین دلایل این اهمیت، قضیه ی نوتر باشد که اشاره به این دارد که: «به ازای هر نوع تقارن از سیستم، کمیتی پایسته (نسبت به زمان) و متناظر با آن، وجود دارد.» به عنوان مثال، فرض بر همگنی در زمان، منجر به پایسته شدن انرژی کل سیستم می شود. به جرات می توان گفت که، تقریباً حوزه ای از فیزیک وجود ندارد که نظریه ی گروه در آن رخنه نکرده باشد. کاربرد وسیع آن در نظریه های مختلف فیزیکی از جمله در فیزیک نظری، «به دلیل تقارن اساسی فضا-زمان مینکوفسکی M_4 به عنوان یک فضا-زمان تخت از یک فضا-زمان خمیده ی لورنتسی با گروه تقارنی پوانکاره»، نظریه ی میدان های کوانتومی، «به دلیل محاسبه ی طیف انرژی سیستم به کمک تعریف عملگر کازیمیر متناظر با گروه تقارنی سیستم در فضای فوک یا هیلبرت متناظر با سیستم»، نظریه های ریسمان و ابرریسمان، «به دلیل تقارن ها و ابر تقارن های حاکم بر ریسمان ها به همراه جبرهای ویراسورو و ابرویراسورو»، نظریه های میدان های همدیس، «به دلیل حاکم بودن تبدیلات همدیس وایل»، نظریه های پیمانه ای، «به دلیل وجود تقارنهای داخلی سیستم»، فیزیک ذرات «که باور بر این است که می توان همه ی ذرات شناخته شده در فیزیک را به کمک گروه، طبقه بندی کرد.» و ... به همراه نظریه های مختلف نمایش که برای بیان چگونگی کنش روی سیستم ها استفاده می شوند؛ از جمله دلایل دیگر اهمیت گروه، در فیزیک است.

در چند دهه ی گذشته، شاهد این بوده ایم که پیشرفت های موجود در فیزیک، مخصوصاً فیزیک نظری، به صورت انواع تقارن ها، الگوها و انواع شکست های تقارنی، فرمول بندی شده اند. با این حال رفته رفته، به منظور تحلیل و بررسی مسائل بنیادی، پیشرفته و پیچیده در فیزیک، نیاز به تعمیم های مختلف و توسعه ی بیشتر مفاهیم تقارن وجود دارد؛ از آن جمله می توان به ابرتبدیلات (ابرگروه ها و ابرجبرهای لی)، جبرهای کوانتومی (گروه های کوانتومی)، تبدیلات موضعی (تبدیلات پیمانه ای) و جبرهای لی نامتناهی اشاره کرد. در این مقاله، ضمن معرفی مختصری از دو مورد تقارن اخیر، کاربردی از آنها را در ساخت ابر Λ -شبه-مدول های تصویری فازی و کوانتومی ارائه خواهیم داد.

ایده ی مربوط به ابرفضاها یا ابرمنیفلدها، به طور تلویحی در سال ۱۹۵۹ میلادی توسط مارتین [۱] که به دنبال تعمیم دینامیک کلاسیکی بود، مطرح شد؛ که در آن دینامیک کلاسیکی، توصیف کننده ی حالت های یک سیستم فیزیکی به عنوان نقاطی از یک فضای پیکربندی مشخص از یک منیفلد هموار M ، است. به مرور و پس از معرفی مدل استاندارد ذرات، مردم به این فکر افتادند که همین ایده را برای یکپارچه سازی توصیف ذرات فرمیونی و ذرات بوزونی در یک فضای واحد، به اسم ابرفضا (Z_2 -مدرج)، نیز انجام دهند. از لحاظ ریاضیاتی این کار معادل است با اتصال متغیرهای مرسوم جابجا شونده ی (بوزونی) با متغیرهای پادجابجا شونده ی (فرمیونی) در یک فضای بزرگتر و واحد [۲]. تقارن این ابرفضا، ابرتقارن نام دارد که در فیزیک، نسخه ی ابر، برای فضا-زمان مینکوفسکی، ابرفضا-زمان به همراه ابرگروه پوانکاره نام دارد؛ که این ابرگروه، شامل همه ی تبدیلات گروه پوانکاره به عنوان تقارن های خارجی سیستم و تبدیلات پیمانه ای مناسب به عنوان تقارنی داخلی سیستم است. همچنین باید اشاره کرد که از اولین نظریه های میدان متناظر با ابرجبر پوانکاره برای این ابرفضا، مدل وس-زومینو می باشد که شامل میدان های اسکالر، شبه اسکالر و اسپینوری که همگی دارای جرم یکسان هستند، می باشد [۳]. در فیزیک بنا به وجود مخروط نوری در نسبیت و در ریاضی به عنوان مثالی از گروه های تقارنی غیرفشرده، AdS^2 [۵ و ۴] و نسخه ی ابر و کوانتومی آن اهمیت بسزایی دارند. در نتیجه در ادامه برای این فضاها، ابر-شبه-مدول های تصویری که از آنها برای ساخت ابر-شبه-عملگرهای دیراک و کایرالیته که برای توصیف ذرات در نظریه ی میدان های کوانتومی استفاده می شود، معرفی خواهند شد [۶].

دومین مفهوم توسعه یافته از تقارن، گروه های کوانتومی هستند؛ که بعد از سال های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ میلادی، ایده ی هندسه ی q -تغییر شکل یافته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. از اولین کارها در این زمینه می توان به تاریندی هویف q -تغییر شکل یافته در چارچوب توسعه هویف-گالوا، عملگر دیراک q -تغییر شکل یافته روی کره ی پولدرز کوانتومی [۷] و عملگر دیراک q -تغییر شکل یافته ی واتامورا-واتامورا D_{WW}^q [۸] اشاره کرد؛ این در حالی است که، مطالعات و کوشش های کمی بر روی فضاها با انحنای منفی انجام گرفته است. نشان داده شده است که به جای کار با عملگرهای خودالحاقی در منیفلدهای فشرده، با عملگرهای شبه خودالحاقی در منیفلدهای غیرفشرده سروکار خواهیم داشت که این تعمیم از چارچوب خودالحاقی به شبه خودالحاقی، به کمک عملگر متریک ناشی شده از یک ضرب داخلی انجام شده است [۹]. نظریه ی گروه کوانتومی، نظریه ای است غنی که دربرگیرنده ی حالت های تهنگی به همراه گروه های لی و جبرهای لی به عنوان یک حالت خاص، که به کمک آن بسیاری از مفاهیم فیزیکی از جمله تقارن های فضا-زمانی، تقارن های پیمانه ای، انواع مختلف از تقارن های دینامیکی و ... قابل توصیف است. گروه کوانتومی، موجودات جبری تعمیم یافته ای هستند که منشا آنها از لحاظ ریاضیاتی به تجرید از ساختارهای توسعه داده شده در چارچوب پراکندگی معکوس که روشی برای حل مدل های کوانتومی انتگرال پذیر است، بر می گردد. لازم به ذکر است که روش پراکندگی معکوس موضوع بسیار وسیعی است که نمی توان آن را فقط به گروه های کوانتومی محدود کرد؛ با این حال، بیشترین کاربرد گروه های کوانتومی در نظریه ی سیستم های انتگرال پذیر است. در حال حاضر، گروه های کوانتومی و در یک مفهوم کلی تر، هندسه ی غیرجابجایی به موضوعی عظیم و همه کاره در فیزیک مدرن کنونی تبدیل شده است؛ به طوری که می توان از شاخه های مختلف فیزیک که این جبرهای کوانتومی در آنجا نقش حیاتی ایفا می کنند به: توصیف زنجیره های اسپینی، توصیف آنیون ها، کاربردهای وسیع در اپتیک کوانتومی، توصیف دوران ها و ارتعاشات مولکولی، نظریه های میدان همدیس و ... اشاره کرد [۱۰]. از نقطه نظر ریاضیاتی، فرآیند استخراج گروه های کوانتومی از گروه های کلاسیکی تا حد زیادی مشابه با شیوه ی کوانتوم سازی کلاسیکی است [۱۱]. در واقع این فرآیند یک تعمیم بسیار غیربیدی از کوانتوم سازی معمولی است که در آن ویژگی های توپولوژیکی و هندسی یک منیفلد گروهی به همراه ساختار گروهی روی آن، در نظر گرفته می شود. به یک معنا، نقش هندسه ی ناجابجایی و گروه های کوانتومی در مکانیک کوانتومی، مشابه نقشی است که هندسه دیفرانسیل معمولی و گروه های لی در نسبیت عام اینشتین ایفا می کنند. هر دوی مفاهیم مذکور چنان فرمالیسم طبیعی برای توصیف پدیده های فیزیکی ارائه می دهند که در اصل تمایز بین «هندسه» و «فیزیک» از بین می رود و از «دینامیک هندسی» یا «فیزیک هندسی» صحبت می شود. در نتیجه می توان گفت که یک گام اساسی جهت هندسه سازی پدیده های کوانتومی، معرفی گروه های کوانتومی بوده است. بدیهی است که به دلیل معرفی مفهوم تقارنی جدید (گروه های کوانتومی)، می توان حد کلاسیکی متفاوت و مستقل از ثابت پلانک \hbar را تعریف کرد که با پارامتر q نشان داده می شود و به صورت $1 \rightarrow q$ می باشد. در انتها اشاره ای به رهیافت های متفاوت، که برای ساختن گروه های کوانتومی وجود دارند، می شود، که عبارتند از:

- رهیافت درینفلد [۱۲]؛ که مبتنی است بر تغییر شکل ساختار پواسنی یک گروه.
- رهیافت R -ماتریس فادو-رشتیخین-تخته جان [۱۳]؛ که به نوعی دوگان با رهیافت درینفلد است.
- رهیافت مانین [۱۴ و ۱۵]؛ که در آن موجود اولیه یک جبر درجه ی دوم روی فضاها ی خطی کوانتومی است.
- رهیافت ورونوویچ [۱۶-۱۸]؛ با پس زمینه ای اساسا متفاوت با نظریه ی جبری C^* .

از میان این رهیافت ها، سه رهیافت اول خیلی نزدیک بهم و مکمل همدیگر هستند و رهیافت آخر با اتکای به قضیه ی گلفاند-نایمارک، نزدیک به فرض های تعمیم یافته ی گُن در مورد هندسه ی ناجابجایی است [۱۹].

۲ مدول های تصویری

در این قسمت ساختار ریاضیاتی مدول های تصویری متناسب با اهداف مقاله، ارائه می شود تا به کمک آن بتوان، راحت تر تعمیم مدول های تصویری را به ابرفضاها انجام داد. اساس این تعمیم متکی بر قضایای گلفاند-نایمارک و سر-سوان [۲۰] است. طبق قضیه ی گلفاند-نایمارک، «هر جبر C^* جابجایی با عضو یکدار، با جبر همه ی توابع پیوسته روی یک منیفلد توپولوژیکی فشرده و مشخص، یکرخت است.» در واقع به دلیل بی معنا بودن مفهوم نقطه در هندسه ی ناجابجایی، از جبر توابع تعریف شده روی این فضاها برای مطالعه ی خود فضا، استفاده می شود؛ از طرفی، تعمیم از فضای جابجایی به فضای ناجابجایی به کمک همین جبر توابع تعریف شده روی این فضاها، خیلی راحت تر است. این کار همان شگرد گن، برای ناجابجایی کردن فضا از طریق ناجابجایی کردن جبر توابع پیوسته روی آن فضا می باشد که ما نیز در این مقاله از آن بهره برده ایم. لازم به ذکر است که به عنوان یک رهیافتی دیگر، با جانشانی مدول های تصویری متناهی به جای کلاف های برداری، نیز می شود به هندسه ی ناجابجایی رسید؛ اساس این جانشانی بر مبنای قضیه ی سر-سوان است که بیان می دارد «یک هم ارزی بین رسته ی کلاف های برداری روی یک منیفلد فشرده ی M ، با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر جابجایی از توابع هموار $C(M)$ روی M وجود دارد.» البته اخیرا این هم ارزی به منیفلدهای غیرفشرده تعمیم پیدا کرده است [۲۱]؛ به کمک این تعمیم و کارهای مصطفی زاده [۲۲، ۲۳] و به کمک قضایای مذکور، می توان روش ساخت مدول های تصویری را به منیفلدهای فشرده تعمیم داد.

۱.۲ مدول های آزاد، مدول های تصویری

در ابتدا مفهوم مدول های آزاد و تصویری معرفی می شود. برای این منظور، $Mat(N+1) = Mat(2L+1)$ را به عنوان یک فضای برداری، در نظر می گیریم که حامل نمایش های منظم راست و چپ جبر فازی (ناجابجایی) است. در نتیجه، به ازای هر $a, b \in Mat(2L+1)$ ، دو عملگر a^L و a^R روی $Mat(2L+1)$ کنش می کند، وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a^R b = ba, \quad a^L b = ab \quad (1)$$

$$a^R b^R = (ba)^R \quad \text{و} \quad a^L b^L = (ab)^L$$

با یک مدول V برای یک جبری مثل A ، یک فضای برداری است که حامل نمایش آن جبر است؛ و یک دو مدول است هرگاه دو نوع کنش متفاوت از جبری مثل A داشته باشیم. در نتیجه در مثال فوق، $V = Mat(2L+1)$ یک دو مدول برای جبر A است که ترکیبات خطی از بردارها در V ، ضرایبشان را از A می گیرند. در حالت کلی، یک A -مدول آزاد گفته می شود هرگاه دارای پایه ی $\{e_i\}$ باشد. در این صورت، هر $x \in V$ را می توان به شکل منحصر به فرد $\sum a_i e_i$ نوشت. یک کلاس از دو مدول های آزاد $V = Mat(N+1)$ را می توان به صورت $V \otimes C^K \cong V^K$ ساخت که در آن اعضای V^K به صورت $v \doteq (v_1, \dots, v_K)$ می باشند. یک Λ -شبه تصویرگر P روی A -مدول V^K ، یک ماتریس $K \times K$ به صورت $P = (P_{ij})$ است با درایه های $P_{ij} \in A$ ؛ که در شروط زیر صدق می کند:

$$P^\dagger = \Lambda P \Lambda^{-1}, \quad P^\dagger = P \quad (2)$$

که در آن Λ ، یک ماتریس هرمیتی است. در نتیجه هر بردار در PV^K را می توان به صورت ترکیب خطی از Pe_i با ضرایبی از جبر A نوشت. بدین ترتیب، PV^K یک مثال از مدول تصویری است. در نتیجه بدیهی است که بنویسیم:

$$V^K = PV^K \oplus (1 - P)V^K \quad (3)$$

یک مدول را که چه تصویری باشد و چه هر چیز دیگری، بدیهی گویند هرگاه یک مدول آزاد باشد.

۲.۲ مدول های تصویری روی (AdS^2)

ایده ی مذکور در قسمت قبل، برای هر جبری مثل A و یک A -مدول V ، معتبر است. می توان نشان داد که اعضای A -مدول، مقاطع کلاف های روی M هستند که در اینجا ما آن را به صورت $M = AdS^2 = SU(1,1)/U(1)$ بر می داریم. گروه $SU(1,1)$ یک گروه غیرفشرده است و به طور توپولوژیکی با منیفلد غیرفشرده ی غیرهمبند ساده ی $D \times S^1$ معادل و با گروه های زیر یکرخت است:

$$SU(1,1) \simeq SL(2, \mathbb{R}) \simeq Sp(2, \mathbb{R}), \quad SU(1,1)/Z_2 \simeq SO(2,1) \quad (4)$$

در نتیجه به دلیل غیرفشرده بودن گروه $SU(1,1)$ ، دارای نمایش یکانی متناهی بعد نخواهد بود؛ از طرفی، نمایش های غیریکانی متناهی بعد Λ -شبه هرمیتی خواهد بود. برای هر نمایش کاهش ناپذیر یکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم ساده ی فشرده ی $SU(2)$ ، ناگزیر می توان نمایش را به طور تحلیلی به یک نمایش غیریکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم ساده ی غیرفشرده $SU(1,1)$ ادامه داد. هر دو گروه $SU(2)$

و $SU(1, 1)$ به طور مشترک دارای زیر گروه ماکسیمال فشرده ی $U(1)$ و یک گروه لی مختلط سازی شده ی $SL(2, \mathbb{C})$ هستند. نمایش کاهش ناپذیر با کمترین بعد جبرلی $su(2)$ را که توسط ماتریس های پاولی $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ نمایش داده می شود، در نظر می گیریم؛ لذا می توان یک نمایش غیریکانی دو بعدی از جبرلی $su(1, 1)$ را به صورت زیر از روی آنها ساخت:

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad \Sigma_2 = \frac{i}{2}\sigma_2, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \quad (5)$$

ماتریس های Σ_i, Λ -شبه هرمیتی هستند به طوری که:

$$\Sigma_i^\dagger = \Lambda \Sigma_i \Lambda^{-1} \quad (6)$$

در این حالت، مقاطع یک کلاف تاری پیچانده شده روی AdS^2 ، همچو $U(1)$ -کلاف، (اعضای) مدول های تصویری غیربدیهی هستند؛ که طبق قضیه ی سر-سوان، می توان آنها را با مدول های تصویری جایگزین کرد. مدول آزاد $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^2$ را در نظر می گیریم. اگر \hat{x} تابع مختصاتی باشد، به این صورت که $a \in \mathcal{A}, (\hat{x}_i a)(x) = x_i a(x)$ ؛ می توان تصویرگر زیر را برای این مدول آزاد در نظر گرفت:

$$P_\pm = \frac{1 \pm 2\vec{\Sigma} \cdot \hat{x}}{2} \quad (7)$$

مختصات x_i نیز، معرف نقاط هذلولی گون AdS^2 با انحنای منفی که در فضای تخت مینکوفسکی با متریک $\eta^{ij} = diag(1, 1, -1)$ نشانده شده است، می باشند:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = x_i \eta^{ij} x_j = -1 \quad (8)$$

بدین ترتیب، $P_\pm \mathcal{A}^2$ یک مدول تصویری برای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

۳.۲ مدول های تصویری روی AdS_F^2

نسخه ی فازی مدول تصویری ساخته شده در بالا را می توان با ناجابجایی ساختن جبر توابع حاکم بر آن، بدست آورد. برای این منظور، کافی است متغیرهای جابجایی فضا x_i را با عملگرهای متناظر جایگزین کنیم؛ در این حالت، به جبر $su(1, 1)$ خواهیم رسید:

$$[J_i, J_j] = iC_{ij}^k J_k \quad (9)$$

روی \mathbb{C}^2 ، نمایش اسپین $\frac{1}{2}$ از $SU(1, 1)$ با مولدهای Σ_i کنش می کند و روی AdS_F^2 ، نمایش اسپین l از $SU(1, 1)$ با مولدهای L_i^L از چپ و L_i^R از راست کنش خواهد کرد. در این حالت، در فضای Λ -شبه مدول تصویری فازی $(AdS_F^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ و یا $P_{(l\pm\frac{1}{2})}^{F,L}$ و یا $P_{(l\pm\frac{1}{2})}^{F,R}(AdS_F^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ ، جفت شدگی اسپین های ذاتی و مداری را خواهیم داشت که در Λ -شبه تصویرگرهای فازی $P_{(l\pm\frac{1}{2})}^{F,L}$ و یا $P_{(l\pm\frac{1}{2})}^{F,R}$ خود را نشان می دهد[۵]:

$$P_{(l-\frac{1}{2})}^{L,F} = \frac{2\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}^L + l - 1}{2l - 1}, \quad P_{(l+\frac{1}{2})}^{L,F} = -\frac{2\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}^L - l}{2l - 1} \quad (10)$$

Λ -شبه تصویرگرهای راست را نیز می توان با اعمال $\vec{L}^L \rightarrow -\vec{L}^R$ بدست آورد. بدیهی است که تحت اصل تطابق، Λ -شبه تصویرگرهای (۱۰)، به Λ -شبه تصویرگرهای (۷) تبدیل خواهند شد. برای این منظور، حد کلاسیکی معادل است با $l \rightarrow \infty$ ؛ که تحت آن:

$$x_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{L_i^L, L_i^R}{l} \quad (11)$$

۳ ابرمدول های تصویری فازی

به منظور معرفی ابر- Λ -شبه مدول های تصویری روی ابرهذلولی گون فازی $AdS_F^{(2|2)}$ ، نیاز است تا در ابتدا این ابرفضا را معرفی کنیم. ابرفضای $R^{(2|2)}$ به عنوان جبر چندجمله ای هایی با مولدهای x_i و θ_α به همراه معادله ی توصیف کننده ی مدار الحاقی $EAdS^{(2|2)}$ از $OSp(1|2)$ که در شرایط زیر صدق می کنند، تعریف می شود:

$$x_i^\dagger = x_i, \quad \theta_\alpha^\dagger = \varepsilon_{\alpha\beta} \theta_\beta, \quad EAdS^{(2|2)} = \langle (x_i, \theta_\alpha) \in R^{(2|2)} \mid \eta^{ij} x_i x_j - \varepsilon^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta = -1 \rangle \quad (12)$$

که \ddagger ، نشان دهنده ی ابرالحاقی است؛ و

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ -1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^t = \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \circ & -1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \quad (13)$$

و $\theta = (\theta^+, \theta^-)^t$ نمایش اسپینور ماژورانا^۲ $SO(2, 1)$ است. فرض می کنیم $X_i = \mu L_i$ و $\Theta_\alpha = \mu L_\alpha$ که μ توسط رابطه ی زیر تعیین می شود:

$$\frac{1}{\mu^2} = C_{osp(1|2)} = -l(l - \frac{1}{\ddagger}), \quad X_i = \frac{L_i}{\sqrt{-l(l - \frac{1}{\ddagger})}}, \quad \Theta_\alpha = \frac{L_\alpha}{\sqrt{-l(l - \frac{1}{\ddagger})}} \quad (14)$$

که در جبر $osp(1|2)$ به صورت زیر صدق می کنند:

$$[X_i, X_j] = \frac{i\varepsilon_{ij}^k}{\sqrt{-l(l - \frac{1}{\ddagger})}} X_k, \quad [X_i, \Theta_\alpha] = \frac{(\kappa_i)^\beta}{2\sqrt{-l(l - \frac{1}{\ddagger})}} \Theta_\beta, \quad \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\} = \frac{(\varepsilon^t \kappa^i)_{\alpha\beta}}{2\sqrt{-l(l - \frac{1}{\ddagger})}} L_i \quad (15)$$

همچنین این مختصات در رابطه ی زیر که معادله ی ابرهذلولی گون فازی $AdS_F^{(2|2)}$ را مشخص می کند، صدق می کنند:

$$\eta^{ij} X_i X_j - \varepsilon^{\alpha\beta} \Theta_\alpha \Theta_\beta = -1 \quad (16)$$

طبیعتا مختصات (x_i, θ_α) که برای ابرهذلولی گون جابجایی $AdS^{(2|2)}$ بودند، در حالت حدی از مختصات ناجابجایی مذکور به صورت زیر، قابل بدست آمدن هستند:

$$x_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{L_i^{L,R}}{l}, \quad \theta_\alpha = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{L_\alpha^{L,R}}{l} \quad (17)$$

در ابرتاربندی غیرفشرده هویف $EAdS^{(2|2)} \xrightarrow{U(1)} AdS^{(2|2)}$ ، مقاطع به صورت $\Gamma^\infty(EAdS^{(2|2)}, E^{(n)})$ با $G(EAdS^{(2|2)})$ -مدول است که در آن $G(EAdS^{(2|2)})$ ، جبر جابجایی ابرتوابع روی ابرهذلولی گون $EAdS^{(2|2)}$ می باشد. در مدل فازی، این جبر، جبری ناجابجایی است؛ در نتیجه، مدول های راست و چپ، با هم یکریخت نخواهند بود. در این حالت برای هر عملگر تکانه ی زاویه ای $\mathbf{L} = (L_i, L_\alpha)$ ، دو عملگر خطی \mathbf{L}^R و \mathbf{L}^L که در واقع نقش کنش های راست و چپ روی ابرجبر ماتریسی شبه-الحاقی فازی $\mathcal{A}_l = \{\psi \in M_{\ddagger l + 1}(C_L)\}$ را دارند، وابسته می کنیم:

$$L_i^L \psi = L_i \psi, \quad L_i^R \psi = \psi L_i, \quad L_\alpha^L \psi = L_\alpha \psi, \quad L_\alpha^R \psi = \psi L_\alpha \quad \forall \psi \in \mathcal{A}_l \quad (18)$$

که کنش راست در جبر $osp(1|2)$ با علامت منفی $(-L_i^R, -L_\alpha^R)$ صدق می کند. این عملگرهای راست و چپ با هم طبق روابط جابجایی زیر، جابجا می شوند:

$$[L_i^L, L_j^R] = \circ, \quad [L_\alpha^L, L_\beta^R] = \circ \quad (19)$$

\mathbf{L}^R و \mathbf{L}^L هر دو دارای جبر یکسان $osp(1|2)$ و طبیعتا یک نوع عملگر کازیمیر $C_{osp(1|2)}$ هستند:

$$C_{osp(1|2)} \equiv \mathbf{L}^L \cdot \mathbf{L}^L = \mathbf{L}^R \cdot \mathbf{L}^R = -l(l - \frac{1}{\ddagger})1 \quad (20)$$

\mathcal{L} را به صورت کنش الحاقی L_i و L_α روی \mathcal{A}_l تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}_i \psi = (L_i^L - L_i^R) \psi = ad_{L_i} \psi = [L_i, \psi], \quad \mathcal{L}_\alpha \psi = (L_\alpha^L - L_\alpha^R) \psi = ad_{L_\alpha} \psi = [L_\alpha, \psi] \quad (21)$$

فرض می کنیم $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ مولدهای جبرلی $su(1, 1)$ هستند. بدین ترتیب، می توان نسخه ی ابر این ماتریس ها را به عنوان نمایش اساسی ابراسپین $\frac{1}{\ddagger}$ جبر $osp(1|2)$ تعریف کرد:

$$\Sigma_i = \frac{1}{\ddagger} \begin{pmatrix} \kappa_i & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha = \frac{1}{\ddagger} \begin{pmatrix} \circ & \tau_\alpha \\ -(\varepsilon \tau_\alpha)^t & \circ \end{pmatrix} \quad (22)$$

با $\varepsilon = i\sigma_2, \tau_1 = (1, 0)^t$ و $\tau_2 = (0, 1)^t$. جبر $osp(1|2)$ شامل جبر $su(1, 1)$ به عنوان زیر جبر ماکسیمال بوزونی و متشکل از پنج مولد، که سه تای آنها $L_i (i = 1, 2, 3)$ برای بوزون ها و دوتای دیگه $L_\alpha (\alpha = +, -)$ برای فرمیون ها است، می باشد. این مولدها رابطه های جابجایی زیر را با هم دارند:

$$[L_i, L_j] = iC_{ij}^k L_k, \quad [L_i, L_\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa_i)_\alpha^\beta L_\beta, \quad \{L_\alpha, L_\beta\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^t \kappa_i)_{\alpha\beta} L_i \quad (23)$$

قسمت زوج این جبر $su(1, 1)$ است که توسط مولدهای L_i و قسمت فرد آن نیز توسط مولدهای L_α که در واقع اسپینورهای $su(1, 1)$ هستند، تولید می شود. نمایش های کاهش ناپذیر جبر $osp(1|2)$ توسط عملگر کازیمیر زیر توصیف می شود:

$$C_{osp(1|2)} = \eta^{ij} L_i L_j - \varepsilon^{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta, \quad (24)$$

این عملگر دارای ویژه مقدار $l(l - \frac{1}{2})$ است که l معرف ابراسپین با $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ و $L_i \cdot l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ و $L_\alpha \cdot l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ به معنای معنی که:

$$L_i^\dagger = L_i, \quad L_\alpha^\dagger = \Lambda L_\alpha \Lambda^{-1}, \quad (25)$$

حال، ساختار ابرکلاف تار غیرفشرده ی زیر با ابرفضای کل $AdS_F^{(2|2)}$ را که در آن $EAdS_F^{(2|2)}$ ابرهذلولی گون اقلیدسی فازی با بعد $(2|2)$ به عنوان ابرمنیفلد پایه، که به نوعی ابرمنیفلد دی ویت^۲ با بادی^۳ $EAdS_F^{(2|2)}$ است، را در نظر می گیریم:

$$U(1) \xrightarrow{\text{right } U(1)\text{-action}} AdS_F^{(2|2)} \xrightarrow{\pi} EAdS_F^{(2|2)} \quad (26)$$

ابروگروه تقارنی ابرفضای کل $AdS_F^{(2|2)}$ ، $OSp(1|2)$ با بعد $(1|2)$ و ساختار ابرگروهی $U(1)$ می باشد. فرض می کنیم $B_{C_L} = G^\infty(AdS_F^{(2|2)}, C_L)$ و $A_{C_L} = G^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, C_L)$ به ترتیب نشان دهنده ی جبرهای مدرج C_L -مقداره ی توابع روی ابرمنیفلد $AdS_F^{(2|2)}$ و ابرمنیفلد پایه ی $EAdS_F^{(2|2)}$ که تحت ضرب نقطه به نقطه هموار هستند، باشد. در اینجا، C_L نشان دهنده ی جبر گراسمن^۵ مختلط با L مولد است. مشابه با گروه $U(1)$ ، نمایش های کاهش ناپذیر ابرگروه $U(1)$ با عدد صحیح n برچسب می خورند. اعضای B_{C_L} را می توان به صورت مدول های راست کلاسه بندی کرد؛ یعنی: $((\forall p \in AdS_F^{(2|2)}, \forall \omega \in U(1))$

$$C_{(\pm n)}^\infty(AdS_F^{(2|2)}, C_L) = \{\varphi_{(\pm n)} : AdS_F^{(2|2)} \rightarrow C_L, \quad \varphi_{(\pm n)}(p \cdot \omega) = \omega^{(\pm n)} \cdot \varphi(p)\} \quad (27)$$

کنش های چپ ابرگروه $U(1)$ روی C_L با n برچسب می خورند؛ که در واقع این کنش ها توصیف کننده ی یک کلاف هستند. طبق قضیه ی سر-سوآن، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M ، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با این کلاف ها، ابر-شبه تصویرگرهای P_n وجود دارد؛ به طوری که برای ابرکلاف برداری وابسته شان خواهیم داشت:

$$E^{(n)} = AdS_F^{(2|2)} \times_{U(1)} C_L \xrightarrow{\pi} EAdS_F^{(2|2)} \quad (28)$$

A_{C_L} -مدول راست مقاطع $\Gamma^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, E^{(n)})$ که یکرخت با $G_{(n)}^\infty(AdS_F^{(2|2)}, C_L)$ می باشد؛ خود هم ارز است با تصویر در مدول آزاد $(A_{C_L})^{(n+1)} = G^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, C_L) \otimes C_L^{n+1}$ که $\Gamma^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, E^{(n)}) = P_n(A_{C_L})^{n+1}$ که P_n ابرتصویرگر P_n ابر-شبه تصویرگر P_n یک ابرعملگر شبه الحاقی با ابررتبه ی ۱ روی C_L است:

$$P_n \in M_{(n+1)}(A_{C_L}), \quad P_n^\dagger = P_n, \quad P_n^\dagger = \Lambda P_n \Lambda^{-1}, \quad Str P_n = 1 \quad (29)$$

که در آن Str ، ابررد و ۱، ابرتابع ثابت است. برای A_C -مدول راست از مقاطع $\Gamma^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, E^{(n)})$ ، $n+1$ ابرتصویرگر P_1, P_2, \dots, P_{n+1} با رتبه ی یکسان ۱ وجود دارد. بنابراین مدول آزاد $(A_{C_L})^{n+1}$ را می توان به صورت زیر، از جمع مستقیم تصویرگرهای A_{C_L} -مدول نوشت:

$$(A_{C_L})^{n+1} = \bigoplus_{i=1}^{n+1} P_i(A_{C_L})^{n+1} \quad (30)$$

می توان نشان داد که در آن ابرتصویرگرها به صورت زیر می باشند:

$$P_{(l \pm \frac{1}{2})}^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 \pm \frac{\sum \cdot \mathbf{L}^R + 1}{\sqrt{4l(\frac{1}{2} - l) - 1}} \right], \quad P_{(l \pm \frac{1}{2})}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 \mp \frac{\sum \cdot \mathbf{L}^L - 1}{\sqrt{4l(\frac{1}{2} - l) - 1}} \right], \quad \sum \cdot \mathbf{X} = \eta^{ij} \sum_i X_j - \varepsilon^{\alpha\beta} \sum_\alpha \Theta_\beta \quad (31)$$

۴ ابر- Λ -شبه مدول های تصویری کوانتومی

بعد از معرفی Λ -شبه مدول های تصویری و نسخه ی ابر- Λ -شبه فازی آنها، می توان نسخه ی کوانتومی این Λ -شبه مدول های تصویری را ارائه داد. مشابه با حالت فازی، ضروری است تا در ابتدا فضای کوانتومی معرفی و سپس تعمیم انجام شود. برای این منظور، در ابتدا q -عدد برای n را تعریف کنیم [۲۴]:

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (۳۲)$$

برای ابرهندلولی گون کوانتومی فازی $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ ، مولدهای جبر مختصاتی $A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ آن را با $X_+, X_-, X_0, \Theta_+, \Theta_-$ نشان خواهیم داد که به صورت زیر تعریف می شوند و در روابط جابجایی داده شده صدق می کنند:

$$X_i = \frac{[\nu]_q L_i}{\sqrt{[-2l]_q [\nu l - 1]_q}}, \Theta_\alpha = \frac{[\nu]_q L_\alpha}{\sqrt{[-2l]_q [\nu l - 1]_q}}, \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_- - \mathbf{X}_- \mathbf{X}_+ = \mu \mathbf{X}_0 - (q - q^{-1}) X_0^\nu, [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_\pm]_q = \pm \mu \mathbf{X}_\pm \quad (۳۳)$$

همچنین ابرهندلولی گون کوانتومی فازی نیز با رابطه ی زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \sum_{\circ, \pm} (-1)^{l-m} q^m X_{-m} X^m - \varepsilon^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta = -X_0^\nu + q X_- X^+ + q^{-1} X_+ X^- - \varepsilon^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta = -1 \quad (۳۴)$$

$Osp_q(\nu|1)$ تقارن این ابرهندلولی گون کوانتومی $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ است که ابرجبر آن $U_q(osp(\nu|1)) = osp_q(\nu|1)$ یک جبر Z_2 -مدرج یکدار و شرکت پذیر است که توسط عضو زوج L_0 و عضوهای فرد L_\pm ایجاد می شود:

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [\nu L_0]_{q^{\frac{1}{\nu}}} \quad (۳۵)$$

را می توان با اضافه کردن این ولوشن مدرج E به مجموعه ی مولدها مشخص کرد؛ در نتیجه ابرجبر کوانتومی $osp_q(\nu|1)$ در روابط زیر صدق خواهند کرد:

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [\nu L_0]_{q^{\frac{1}{\nu}}}, \quad \{E, L_\pm\} = \circ, \quad [E, L_0] = \circ, \quad E^\nu = 1 \quad (۳۶)$$

که این روابط با معرفی مولدهای جدید $K = q^{L_0}$ و $K^{-1} = q^{-L_0}$ ، تبدیل به روابط زیر می شوند:

$$KL_+K^{-1} = qL_+, \quad KL_-K^{-1} = q^{-1}L_-, \quad KK^{-1} = 1, \quad E^\nu = 1,$$

$$[K, E] = \circ, \quad [K^{-1}, E] = \circ, \quad \{L_\pm, E\} = \circ, \quad \{L_+, L_-\} = \frac{K - K^{-1}}{q^{\frac{1}{\nu}} - q^{-\frac{1}{\nu}}} \quad (۳۷)$$

عملگر کازیمیر $C_{osp_q(\nu|1)}$ که با همه ی مولدهای رابطه ی (۳۶) جابجا می شود و دارای ویژه مقدار $\frac{[-2l]_q [\nu l - 1]_q}{[\nu]_q^2}$ است که در حد $q \rightarrow 1$ به ویژه مقدار غیر تغییر شکل یافته ی خود، یعنی، $-l(l - \frac{1}{\nu})$ ، تقلیل می یابد، دارای شکل زیر است:

$$C_{osp_q(\nu|1)} = (L_+ L_- - [L_0 - \frac{1}{\nu}]_q) E \quad (۳۸)$$

با معرفی نگاشت های هم ضرب $\Delta : osp_q(\nu|1) \rightarrow osp_q(\nu|1) \otimes osp_q(\nu|1)$ و هم یکه ی $C : osp_q(\nu|1) \rightarrow C$ و هم وارون $\sigma : osp_q(\nu|1) \rightarrow osp_q(\nu|1)$ ، ساختار جبر هوفت $osp_q(\nu|1)$ توسط روابط زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} \Delta(L_+) &= L_+ \otimes KE + 1 \otimes L_+, & \Delta(L_-) &= L_- \otimes E + K^{-1} \otimes L_-, \\ \Delta(K) &= K \otimes K, & \Delta(E) &= E \otimes E, & \epsilon(E) &= 1, & \epsilon(K) &= 1, & \epsilon(L_\pm) &= \circ, \\ \sigma(E) &= E, & \sigma(K) &= K^{-1}, & \sigma(L_+) &= -L_+ K^{-1} E, & \sigma(L_-) &= -KL_- E \end{aligned} \quad (۳۹)$$

در $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ ، دو پارامتر حقیقی متفاوت q و μ داریم. در نتیجه حالت های حدی متفاوت زیر را خواهیم داشت:

- اولین حد ($1 \rightarrow q$ سپس $\circ \rightarrow \mu$): $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)} \rightarrow EAdS_{\mu}^{(\nu|\nu)} \rightarrow EAdS^{(\nu|\nu)}$
- دومین حد ($\circ \rightarrow \mu$ سپس $1 \rightarrow q$): $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)} \rightarrow EAdS_q^{(\nu|\nu)} \rightarrow EAdS^{(\nu|\nu)}$
- سومین حد (به طور همزمان $\circ \rightarrow \mu$ و $1 \rightarrow q$): $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)} \rightarrow EAdS^{(\nu|\nu)}$

که در آن μ_q به صورت زیر تعریف می شود که در حد $1 \rightarrow q$ به مقدار غیر تبدیل یافته ی متناظرش از $1 \rightarrow q$ تقلیل می یابد: $C_{osp(1|\nu)} \equiv \mathbf{L}^L \cdot \mathbf{L}^L = \mathbf{L}^R \cdot \mathbf{L}^R = -l(l - \frac{1}{\nu})$ یعنی،

$$\mu_q \equiv \frac{[\nu]_q}{\sqrt{[-2l]_q[2l-1]_q}} \quad (40)$$

در سومین حد، رابطه ی (۳۴)، تبدیل به رابطه ی آشنای ابرهذلولی گون $EAdS^{(\nu|\nu)}$ می شود:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \eta^{ij} x_i x_j - \varepsilon^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta = -1 \quad (41)$$

همچنین نسخه ی q -تغییر شکل یافته ی مولدهای $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ از جبر $su(1, 1)$ نیز به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\kappa_1^q = \sqrt{\frac{[\nu]_q}{2q}} \kappa_1 = \sqrt{\frac{[\nu]_q}{2q}} \begin{pmatrix} \circ & -1 \\ -1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \kappa_2^q = \sqrt{\frac{[\nu]_q}{2q}} \kappa_2 = \sqrt{\frac{[\nu]_q}{2q}} \begin{pmatrix} \circ & i \\ -i & \circ \end{pmatrix}, \quad \kappa_3^q = \begin{pmatrix} q & \circ \\ \circ & -q^{-1} \end{pmatrix} \quad (42)$$

نسخه ی ابر این ماتریس ها نیز به قرار زیر تعریف می شوند، که در آن $\varepsilon = i\kappa_3^q, \tau_1 = (1, \circ)^t$ و $\tau_2 = (\circ, 1)^t$ است:

$$\Sigma_i^q = \frac{1}{[\nu]_q} \begin{pmatrix} \kappa_i^q & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha^q = \frac{1}{[\nu]_q} \begin{pmatrix} \circ & \tau_\alpha \\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & \circ \end{pmatrix} \quad (43)$$

حال می توان گفت که، ابرکلاف هویف کوانتومی، یک $U_q(1)$ -کلاف بر روی $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ است که ابرمنیفلد کوانتومی $AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ نقش منیفلد کل آن را دارد. جبرهای مختصاتی مربوط به این ابرکلاف هویف کوانتومی را با $A(AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ برای فضای کل $AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ ، $A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ برای فضای پایه ی $EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ و $A(U_q(1))$ برای تار $U_q(1)$ نشان خواهیم داد. در نتیجه جبر شمول $A(AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}) \hookrightarrow A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ یک توسعه هویف-گالوا است که به عنوان یک ابرکلاف هویف کوانتومی می باشد و طبیعتاً یک نسخه ی جبری از اولین ابرتاربندی هویف کوانتومی

$AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)} \xrightarrow{U_q(1)} EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}$ است؛ کلاف وابسته ی کوانتومی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$E_q^{(n)} := \{x \in A(AdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}) : k \cdot x = q^{\frac{n}{\nu}} x, k \in A(U_q(1))\} \quad (44)$$

به وضوح، هر $E_q^{(n)}$ یک $A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ -دو-مدول است که معادل است با تصویر در یک مدول آزاد $(A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}))^{\nu n+1}$ از یک عملگر کوانتومی خودالحاقی $P_q^{(n)}$ در $Mat_{\nu n+1}(A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}))$ به ازای هر $n \geq \circ$. در اینجا $E_q^{(n)}$ را با $A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)})$ -مدول چپ مقاطع $(A(EAdS_{q\mu}^{(\nu|\nu)}))^{\nu n+1} P_q^{(n)}$ یکی خواهیم گرفت. می توان نشان داد که در آن ابر- Λ -شبه تصویرگرهای q -تغییر شکل یافته برای ابر- Λ -شبه مدول های راست و چپ تصویری، به صورت زیر می باشند: $(\Sigma^q \cdot \mathbf{X} = \sum_{m=\circ, \pm} (-1)^{1-m} (q^m \Sigma_{-m}^q X^m - \varepsilon^{\alpha\beta} \Sigma_\alpha \Theta_\beta)$

$$P_{[l \pm \frac{1}{\nu}]_q}^R = \frac{1}{[\nu]_q} [1 \pm \frac{[\nu]_q \Sigma^q \cdot \mathbf{L}^R + 1}{\sqrt{[-2l]_q[2l-1]_q - 1}}], \quad P_{[l \pm \frac{1}{\nu}]_q}^L = \frac{1}{[\nu]_q} [1 \mp \frac{[\nu]_q \Sigma^q \cdot \mathbf{L}^L - 1}{\sqrt{[-2l]_q[2l-1]_q - 1}}] \quad (45)$$

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، تعمیمی از Λ -شبه مدول های تصویری برای ابرهذلولی گون در دو شکل فازی و کوانتومی که به عنوان مثالی از ابرفضاهای با ابرگروه های تقارنی غیرفشرده هستند، ارائه شد. طبق قضیه ی سر-سون، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M ، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با کلاف های غیرفشرده، ابر- Λ -شبه تصویرگرهای P_n وجود دارد؛ در نتیجه متناظر با این ابر- Λ -شبه مدول های تصویری، ابر- Λ -شبه تصویرگرهای P_n را خواهیم داشت که همچنان که مشاهده شد به دلیل ماهیت غیرجابجایی جبرهای حاکم بر فضاهای مورد بحث، ابر- Λ -شبه مدول های تصویری راست و چپ متفاوت و متناظر با هر ابر- Λ -شبه مدول تصویری، ابر- Λ -شبه تصویرگرهای راست و چپ متفاوت خواهیم داشت، که به نوبه ی خود دارای اهمیت فراوانی در فیزیک هستند؛ به عنوان مثال، به کمک آنها می توان Λ -شبه عملگرهای دیراک و کایرالیته را ساخت که در نظریه ی میدان های کوانتومی برای توصیف ذرات به کار می روند.

مراجع

- [1] J. L. Martin, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A251** (1959) 536,543.
- [2] Philip. Nelson, *Introduction to Supermanifolds*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 3, **No.3** (1988) 585,590.
- [3] H. J. W. Muller-Kirsten, A. Wiedemann, *Introduction to Supersymmetry*, (World Scientific Lecture Notes in Physics-Vol. 80, 2010).
- [4] H. Fakhri and A. Imaanpur, *JHEP.* **03**, 003 (2003) ; e-print [hep-th/0302154].
- [5] H. Fakhri and M. Lotfizadeh, *Dirac operators on the fuzzy AdS₂ with the spin $\frac{1}{2}$ and 1*, *JMP.* **52** (2011) 103508.
- [6] M. Mahmoodi and M. Lotfizadeh, *Super pseudo fuzzy Dirac operator on the super fuzzy Eclidean hyperboloid*, **11nd Seminar on Geometry and Topology** (2021).
- [7] P. Podle's, *Quantum spheres*, *Lett. Math. Phys.* **14** (1987) 193.
- [8] A. Pinzul and A. Stern, *Dirac operator on the quantum sphere*, *Phys. Lett. B* **512** (2001) 217.
- [9] A. Mostafazadeh, *Pseudo hermiticity versus pt symmetry: the structure responsible for the reality of the spectrum of a non- hermitian hamiltonian*. *J. Math. Phys.* **43**, (2002)205; e-print [math-ph/0107001].
- [10] D. Bonatsos and C. Daskaloyannis, *QUANTUM GROUPS AND THEIR APPLICATIONS IN NUCLEAR PHYSICS*, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **43** (1999) 537-618.
- [11] F. A. Berezin, *Comm. Math. Phys.* **40** (1975) 153.
- [12] V. G. Drinfel'd, in *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, Berkley, (1986).
- [13] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtadjan, *Algebra i Analiz*, **1** (1989) 178.
- [14] Y. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Center des Recherches Mathematiques, Montreal (1988).
- [15] Yu. I. Manin, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989) 163.
- [16] S. L. Woronowicz, *Publ. RIMS* **23** (1987) 117.
- [17] S. L. Woronowicz, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 613.
- [18] S. L. Woronowicz, *Invent. Math.* **93** (1988) 35.
- [19] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, New york, (1994).
- [20] R. G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, *Trans. Am. Math. Soc.* **105** (1962) 264-277.
- [21] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Geometric and Algebraic Topological Methods in Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, (2005).
- [22] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, (2002)2814; e-print [math-ph/0110016].
- [23] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, (2002)3944; e-print [math-ph/0203005].
- [24] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).