استنباط هندسی جهت مطالعه‌ی گروه‌های خودریختی

احمدعلی قربان‌پور
مربی ریاضی دانشگاه امام حسین(ع)[۱]

چکیده:

در این مقاله به بررسی مسائلی راجع به گروه‌های خودریختی از دامنه‌های C^n می‌پردازیم. تدوین ایده‌ها کاملاً بر اساس هندسه‌ی متریک است. هم‌چنین برخی از کاربردهای آن را ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی:

گروه اتومورفیسم، نقاط انباشتگی مدارمرزی[۲]، دامنه قویاً شبه‌محدب[۳]، متریک کوبایاشی[۴]،متریک بِرگمن[۵]

۱. مقدمه

در این مقاله، دامنه‌ها باز و همبند فرض شده‌اند. ما روی C^n کار را انجام می‌دهیم. اگر $\Omega \subseteq C^n$ یک دامنه باشد، آنگاه هر خودریختی از Ω ، یک یکریختی تحلیلی[۶] از خودش می‌باشد.

مجموعه خودریختی‌های Ω، به‌شکل $Aut\ (\Omega)$ با عملگر ترکیب نگاشت‌ها یک گروه می‌باشد. توپولوژی روی این گروه در مجموعه‌های فشرده، همگرای یکنواخت است. (همچنین به عنوان توپولوژی فشرده–باز شناخته می‌شود). درحقیقت برای دامنه‌ی کراندار، این گروه همیشه یک گروه حقیقی و غیرمختلط است.[۹]

ـ کلاسیک‌ترین نسخه از قضیه بان وانگ[۷] (مراجعه به [۱۷]) این را اذعان می‌کند:

---

[1] Email:ahmadali_ghorbanpoor1400@yahoo.com
[2] Boundary orbit accumulation points
[3] Strongly pseudoconvex domain
[4] Kobayashi metric
[5] Bergman metric
[6] Biholomorphic
[7] Bun wong

قضیه۱-۱) گیریم $\Omega \subseteq C^n$ یک دامنه‌ی قویاً شبه‌محدب و به‌طور یکنواخت کراندار باشد. فرض کنید گروه خودریختی Ω غیر فشرده باشد. در این صورت Ω یک یکریختی تحلیلی به گوی واحد[1] در C^n می باشد.

بعدها ژان-پیر رُزی[2] (مراجعه به [۱۴]) نتیجه را به شرح زیر تعمیم داد:

قضیه ۱-۲) $\Omega \subseteq C^n$ را یک دامنه کراندار در نظر بگیرید. فرض کنید $P \in \delta\Omega$ دارای یک همسایگی کراندار U است، که قویاً شبه‌محدب است. علاوه‌بر این فرض کنید، فقط $X \in \Omega$ وجود دارد، به‌طوری‌که خودریختی‌های φ_j از Ω به‌ازای $j \to \infty$ ، به $\varphi_j(x) \to P$ همگرا باشند. آنگاه Ω یک یکریختی تحلیلی به گوی واحد B در C^n است.

آنچه در مورد فرمول رُزی قابل‌تأمل است، این است‌که بر ویژگی‌های هندسی موضعی $\delta\Omega$ در P نتایجی را در مورد هندسه کلی از Ω نتیجه می‌دهد.

کار جدیدتر را در ([۸] و [۱۵] و [۱۶])، یک نسخه‌ی متریک از قضیه وانگ/رُزی ارائه شده است.

این آثار به جای این‌که در مورد خودریختی‌ها باشند، در مورد یکریختی‌های متریک کوبایاشی هستند. یکی از اهداف ما درکارحاضر، ارائه و اثبات نسخه‌ای از این نتیجه کلاسیک است، که هیچ اشاره‌ای به خودریختی یا به شبه‌محدب قوی ندارد.

۲. گوی‌های متریک بِرگمن

در این بخش به دامنه‌های قویاً شبه‌محدب و به‌طور یکنواخت کراندار، توجه خواهیم کرد.

ما دامنه Ω را با متر بِرگمن مجهز می‌کنیم (مراجعه به [۱۱]) و این متر را با (۰ و ۰) F_B^{Ω} نمایش می‌دهیم.

تعریف۲-۱) با نماد بالا، ما می‌گوییم دامنه‌ی Ω در خواص "یکنواخت سازی متریک"[3] صدق می‌کند، اگر؛

یک نقطه $\mathrm{P} \in \Omega$ و یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت $\mathrm{r_j} \to \infty$ و یک مجموعه از یکریختی‌های $\mathrm{r_j}$ روی گوی متریک $\beta(\mathrm{P}.\mathrm{r_j})$ وجود دارند؛ به‌طوری‌که

[1] Unit ball
[2] Jean-pierre Rosay
[3] Metric Uniformization Property

*تصویر هر φ_j، یک گوی متریک $\beta(P'.r_j)$ است، که فاصله اقلیدسی کمتر از $\delta_j > 0$ از مرز دارد وبه ازای $j \to \infty$ ، $\delta_j \to \infty$.

حال ما این قضیه‌ی اصلی را خواهیم داشت:

قضیه ۲-۲) گیریم $\Omega \subseteq C^n$ یک دامنه‌ی قویاً شبه‌محدب و به‌طور یکنواخت کراندار باشد. فرض کنید Ω دارای خواص یکنواخت سازی متریک باشد، آنگاه Ω یکریختی تحلیلی به گوی واحد B در C^n است.

تبصره ۲-۳) در این‌جا باید فهمید که در صورت اینکه Ω مرزی و دارای گروه خودریختی غیرفشرده باشد، آنگاه یک نتیجه‌ی قدیمی از کارتَن[1] (مراجعه به[۱۱]) تضمین می‌کند که یک نقطه $Q \in \partial\Omega$ ویک دنباله Ψ_j از خودریختی‌های تحلیلی از Ω وجود دارند؛ به‌طوری‌که به ازای هر نقطه $P \in \Omega$ داشته باشیم؛ $\Psi_j\,(P) \to Q$. و البته Q قویاً شبه‌محدب است. پرواضح است با (مراجعه به [۱۱]) و همچنین،(مراجعه به [۳]) به این نتیجه می‌رسیم که یک نقطه قویاً شبه‌محدب به خوبی توسط یکریختی‌های تحلیلی از گوی واحد B تصویر می شود.

اثبات قضیه قبل این نکات را روشن خواهد کرد.

اثبات قضیه ۲-۲) پر واضح است که مرز هر گوی متریک هموار است؛ (زیرا متر هموار است). هنگامی که R خیلی بزرگ است در واقع $\beta(P.R)$ قویاً شبه‌محدب کراندار خواهد بود و این به دلیل قوانین تئوری فِفِرمن[2] برای ژئودزیک‌های[3] متریک برِگمن است (مراجعه به [۲]).به ازای $R \to \infty$ ؛ $\partial\beta(P.R)$ ، با دامنه $\delta\Omega$ هموار نزدیک خواهد شد. بنابراین $\varphi_j(\delta\beta(P.r_j))$ همچنین شبه‌محدب قوی خواهد بود.

از یک نتیجه قدیمی کوبایاشی و نومیزو[4] (مراجعه به [۱۰]) نتیجه می‌شود، که هر یکریختی از دامنه‌های قویاً شبه‌محدب در متریک برِگمن، در واقع یا یکریختی تحلیلی هستند یا مزدوج با یکریختی تحلیلی هستند.

بنابراین نگاشت‌های φ_j در تعریف خواص یکنواخت‌سازی متریک ممکن است، به صورت یکریختی تحلیلی در نظر گرفته شوند. با رفتن به دنباله، ما می توانیم فرض کنیم که گوی‌های $\beta(P'_j.r_j)$ به معنای اقلیدسی به یک نقطه‌ی مرزی، همگرا به Q شوند. اکنون به‌خوبی واضح است که (مراجعه به [۳]) تنها با یک مورب پیچیده از شکل لِوی[5]، که یک همسایگی از نقطه مرزی قویاً شبه‌محدب Q می‌تواند به صورت یکریختی تحلیلی به گوی با نگاشت Ψ_j که مرز تصویر دارای مرتبه چهارم می‌باشد، ترسیم کرد. یک گوی متریک نزدیک یک نقطه قویاً شبه محدب کراندار شناخته شده است (مراجعه به[۱۱]) اندازه‌ی $C_{\sqrt{\delta}}$ در جهات عادی (مختلط) و در جهات مماس (مختلط)، اندازه است. که در اینجا δ اندازه‌ی گوی از مرز است. پس وضعیت این‌گونه است که ما یک نگاشت φ_j یکریختی تحلیلی از گوی متریک قویاً شبه‌محدب $\beta(P.r_j)$ به گوی متریک قویاً شبه‌محدب

[1] Cartan
[2] Fefferma's regularity theory
[3] Geodesics
[4] Nomizu
[5] Levi form

$\beta(P'.r_j)$ است و یک نگاشت یکریختی تحلیلی نرمال‌کننده هندسی Ψ_jبه شکل همسایگی از $\bar{\beta}(P'.r_j)$ به گوی واحد B است. حال محاسبه ساده است که ببنیم تبدیل موبیوس Λ_j، گوی $\Psi_j(\varphi_j\left(\beta\left(P.r_j\right)\right))$را به یک زیرمجموعه از یک گوی بزرگ در داخل B می‌برد. در واقع ما می‌توانیم هر مجموعه فشرده بزرگ $K \subseteq B$ را ثابت فرض کنیم و با انتخاب j به اندازه کافی بزرگ، $\Lambda_j\Psi_j\left(\varphi(\beta(P.r_j))\right)$، K را می‌پوشاند. اما از آنجایی که $\beta(P.r_j)$ به پایان رسیده به Ω و مجموعه‌های فشرده K به B به پایان رسیده‌اند ما خواهیم دید که حد نگاشت‌های $\Lambda_j o \Psi_j o \varphi_j$ همگرا به یک یکریختی تحلیلی از Ω به B است. که این همان نتیجه مطلوب است.

۳. توصیف هندسی نقاط انباشتگی مدار مرزی

یک قضیه قابل توجه از گرین[۱] و کرانتز[۲] (مراجعه به [۴]) این را می‌گوید:

قضیه ۳-۱) گیریم $\Omega \subseteq C^n$ یک دامنه هموار مرزی باشد و $P \in \delta\Omega$ یک نقطه‌ی انباشتگی مدار مرزی باشد به این معنا که $\varphi_j \in Aut(\Omega)$ و یک نقطه $X \in \Omega$ به طوری که به ازای $j \to \infty$ ، $\varphi_j(X) \to P$ همگرا باشد. آنگاه P باید یک نقطه شبه‌محدب لِوی باشد.

اثبات اصلی این قضیه فقط از طریق نظریه تابع کلاسیک است، کاری که ما در اینجا می‌خواهیم انجام دهیم، ارائه یک نمای هندسی از موضوع است.

گزاره ۳-۲) گیریم $\Omega \subseteq C^n$ یک دامنه به‌طور یکنواخت کراندار و $P \in \partial\Omega$ یک نقطه انباشتگی مدار مرزی باشد. آنگاه P یک نقطه کامل برای متر کاراتئودوری[۳] از Ω است.

تبصره ۳-۳) در حقیقت ما می‌توانیم از هر متری در بیان این مورد استفاده کنیم. به ویژه برای مترهای بِرگمن و گوبایاشی معتبر است. برهان زیر این ادعا را تایید می‌کند.

اثبات گزاره ی ۲.۳) گیریم $X \in \Omega$ و $\varphi_j \in Aut(\Omega)$ به طوری که $\varphi_j(X) \to P$. حال فرض $r > 0$ ثابت باشد. فرض کنید گوی‌های متریک $\beta\left(\varphi_j(X).r\right)$ را داریم. در صورت لزوم با رفتن به زیر دنباله بعدی ممکن است فرض کنیم که این گوی‌ها دوبه دو مجزا هستند. منحنی را در نظر بگیرید که از نقاط $\{\varphi_j(x)\}$ می‌گذرد به P ختم می‌شود. سپس نتیجه می‌شود که این منحنی با طول بی‌نهایت در متر کاراتئودوری است. از این نظر است که P یک نقطه‌ی کامل برای متریک است.

---
[1] Greene
[2] Krantz
[3] Caratheodory metric

گزاره ۳-۴) گیریم $\Omega \in C^n$ یک دامنه به‌طور یکنواخت کراندار و $P \in \partial\Omega$ یک نقطه کامل از متریک کارتئودوری است. آنگاه P یک نقطه شبه‌محدب لِوی است.

اثبات: فرض کنید حکم برقرار نباشد. آنگاه شکل لِوی در P دارای یک مقدار ویژه منفی است، به وسیله توسعه پدیده‌ها رتوگ به این نتیجه می‌رسیم که یک همسایگی باز از P وجود دارد؛ به‌طوری‌که هر تابع یکریخت تحلیلی روی $\Omega \cap U$ ، به U به طور تحلیلی پیوسته است. ولی این نشان می‌دهد که فاصله کاراتئودوری از یک نقطه داخلی $q \in \Omega$ تا P متناهی است. بنابراین P نقطه کامل نیست؛ و لذا تناقض با فرض دارد.

با کنار هم قرار دادن گزاره‌های ۳-۲ و ۳-۴ و قضیه ۳-۱ بدست می‌آید.

۴.نیم پیوستگی از گروه‌های خودریختی

یک قضیه ذکر شده از گرین و کرانتز (ارجاع به [۵]) در زیر توضیح داده شده است. ما ابتدا نیاز داریم یک ایده را تعریف کنیم:

یک دامنه به‌طور یکنواخت کراندار به راحتی توسط یک تابع تعریف شده $\rho \equiv \rho\Omega$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\Omega = \{Z \in C^n; \rho\Omega(Z) < 0\}$$

که روی $\delta\Omega$ ، $\nabla\rho\Omega \neq 0$. می‌توان یک زیرپایه برای توپولوژی روی مجموعه‌ای از دامنه‌های قویاً شبه‌محدب هموار مرزی به روی $\forall\varepsilon > 0$

$$u_{\Omega_{(0.\varepsilon)}} = \left\{\Omega \subseteq C^n \text{ قویاً شبه محدب } \Omega; ||\rho\Omega - \rho\Omega.||_{C^\infty} < \varepsilon\right\}$$

ما این توپولوژی را توپولوژی C^∞ روی دامنه‌های قویاً شبه محدب هموار مرزی می‌نامیم. حال خواهیم داشت:

قضیه ۴-۱) گیریم Ω_0 یک دامنه به‌طور یکنواخت کراندار قویاً شبه محدب باشد. در این صورت یک همسایگی O از Ω_0 در توپولوژی C^∞ روی گردایه‌ای از دامنه‌های قویاً شبه محدب به‌طور یکنواخت کراندار وجود دارد به طوری که اگر $\Omega \in O$ آنگاه؛

* $\text{Aut}(\Omega)$ یک زیرگروه از $\text{Aut}(\Omega_0)$ است.

* یک نگاشت غیر تحلیلی $\alpha: \Omega \to \Omega_0$ در C^∞ وجود دارد به طوری که نگاشت

$$\text{Aut}(\Omega) \ni \varphi \to \alpha o \varphi o \alpha^{-1} \in \text{Aut}(\Omega_0)$$

یک گروه همریختی تک‌ارزی باشد.

البته اثبات این نتیجه برای بازتولید در اینجا بسیار پیچیده است. ولی ما قصد داریم در مورد ماهیت اثبات، نکاتی را بیان کنیم. الهام گرفتن از قضیه فوق یک کار اساسی(مراجعه به [۲]) از دیوید ابیین[1] ،می‌آید نتیجه ابین که برای این منظور در اینجا دوباره فرموله شده است، ممکن است به صورت زیر بیان شود:

قضیه ۴-۲) اگر M یک منیفلد ریمانی[2] فشرده مجهز به متریک g باشد و G گروه یکریختی‌ها از M تحت متریک G باشد و $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به طوری که؛ اگر $\tilde{g}$ یک متر دیگر روی M باشد که $\|g - \tilde{g}\| < \varepsilon$. در این صورت گروه یکریختی $\tilde{G}$ از M در متریک $\tilde{g}$ یک زیرگروه از گروه یکریختی G از M در متریک g است. همچنین یک α دیفئومورفیسم[3] در C^∞ از M به خودش وجود دارد به طوری که نگاشت $\tilde{G} \ni \varphi \mapsto \alpha o \varphi o \alpha^{-1} \in G$ یک گروه همریختی تک‌ارز باشد.

اثبات قضیه ابین یک کاربرد پیچیده از قضیه تابع ضمنی است. به ویژه، او نیم‌پیوستگی[4] را با ساختن یک برش ثابت می‌کند.

استراتژی گرین و کرانتز این بود که مسئله برای گروه‌های خودریختی ازدامنه‌های قویاً شبه‌محدب به گروه-های یکریخت برای منیفلدهای ریمانی کاهش پیدا کند. که به صورت زیر پیش رفت:

۱) آنها روی $\overline{\Omega}$ به عنوان یک یکریختی تحلیلی با متریک ثابت که ساختار نزدیک به مرزی دارد، ساختند.
۲) آنها متریک دوگانه فرض شده $\widehat{M}$ را از دامنه از (۱) مجهز شده با متر مخصوص در نظر گرفتند.
۳) آنها تایید کردند که یکریخت‌های $\widehat{M}$ فقط نگاشت‌های یکریختی تحلیلی یا با نگاشت‌های یکریختی تحلیلی مزدوج هستند.
۴) آنها قضیه ابین را برای گروه تکریختی $\widehat{M}$ را اعمال کردند.
۵)آنها نتیجه [۵] را تجزیه و تحلیل کردند و از قضیه نیم‌پیوستگی برای گروه‌های یکریختی که در بالا ذکر شد استخراج کردند.

بنابراین می‌بینیم که قضیه نیم‌پیوستگی گرین-کرانتز برای گروه‌های یکریختی است، طبیعتاً یک قضیه هندسه ریمانی اینطور است. بنابراین این مقوله با روح مقاله حاضر بسیار همخوانی دارد.

---
[1] David ebin
[2] Riemanian manifold
[3] Diffeomorphism
[4] Semicontinuity

۵. باز بودن مجموعه دامنه‌های صلب

یک دامنه صلب[1] از یک گروه یکریختی عبارتست از همانی تنها. این نتیجه فوری قضیه (۴-۲) است؛ که مجموعه‌ای از دامنه‌های قویاً شبه‌محدب ، به‌طور یکنواخت کراندار و صلب، باز هستند. ما در بخش حاضر راه دیگری برای مشاهده موضوع ارائه می‌دهیم.

گیریم Ω_0 یک دامنه صلب باشد. اگر Φ نگاشت غیرهمانی یکریختی تحلیلی دلخواه از Ω به خودش باشد و در این صورت نقاط P و Q در Ω_0 وجود دارند به طوری که $d_{\Omega_0}(P.Q) \neq d_{\Omega_0}(\Phi(P).\Phi(Q))$. که در اینجا d_{Ω_0} فاصله متریک بِرگمن در Ω_0 است. اگر Ω دامنه‌ای باشد که در توپولوژی C^∞، نزدیک به Ω_0 باشد، آنگاه متریک بِرگمن روی Ω به متریک بِرگمن روی Ω_0 نزدیک است. (مراجعه به [۶]). به ویژه ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر Φ یک نگاشت یکریخت تحلیلی دلخواه از Ω به خودش باشد؛ در این صورت نقاط PوQ در Ω_0 وجود دارند به طوری که

$$d_\Omega(P.Q) \neq d_\Omega(\Phi(P).\Phi(Q))$$

که در اینجا d_Ω فاصله در متریک بِرگمن روی Ω است. لذا نتیجه می‌گیریم Ω صلب است.

۶. بسته بودن کلاس‌های هم ارزی یکریختی‌های تحلیلی

گیریم Ω_0 دامنه قویاً شبه محدب ، به‌طور یکنواخت کراندار باشد و B_{Ω_0} گردایه‌ای از دامنه‌های قویاً شبه‌محدب ، به‌طور یکنواخت کراندار است که هم‌ارز یکریخت‌های تحلیلی روی Ω_0 است. B_{Ω_0} را با توپولوژی معمولی C^∞ روی دامنه‌ها مجهز می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که B_{Ω_0} بسته است.

برای دیدن این، گیریم $\{\Omega_j\}\subseteq B_{\Omega_0}$ دنباله‌های همگرا به حد دنباله Ω^* باشند. ادعای ما این است که $\varphi_j.\Omega_j \to \Omega_0$ یک یکریختی تحلیلی باشد. هر دامنه را با متریک کوبایاشی تجهیز کنید. در این صورت هر φ_j یک نگاشت لیپ شیتس[2] با نُرم لیپ شیتس حداکثر ۱ . پس می‌توانیم قضیه آسکولی- آزرلا[3] را اعمال کنیم به همراه با موربندی معمول در یک دنباله طاقت‌فرسا از زیرمجموعه‌های فشرده، برای تعیین اینکه یک دنباله φ_{jk} وجود دارد که به طور یکنواخت در مجموعه‌های فشرده به یک نگاشت حدی همگرا می‌شود به φ^* اما این نیز واضح است. $\varphi^*:\Omega^* \to \Omega_0$ و قضیه‌ها رو نیز تضمین می‌کند که این نگاشت در واقع یک یکریختی تحلیلی است. در نتیجه $\Omega^* \in B_{\Omega_0}$.

---
[1] Rigid domain
[2] Lipschitz
[3] Ascoli-Arzela

7.نتیجه

مدتی است که در نظریه توابع، یک حقیقت غیرقابل انکار است که موقعیت چندین متغیر مختلط از آنالیز مختلط را می‌توان با استفاده از زبان هندسه متریک روشن کرد. در این مقاله نقطه تمرکز بررسی، دامنه های قویأ شبه محدب و به طور یکنواخت کراندار از C^n بود که توانستیم در قضایا و گزاره های متوالی شرایط یک یکریختی تحلیلی به گوی واحد در C^n را تبیین کنیم. توصیفی هندسی از نقاط انباشتگی مدار مرزی ارائه و شرایط تناظر آن را با نقاط شبه محدب لِوی تعریف گردید. در ادامه با معرفی روی این دامنه ها و ارائه قضیه (۴-۲) نقطه اوج این مقاله رقم خورد. در انتها هدف از این مقاله این بوده است که از طریق چندین نتیجه در نظریه دامنه‌ها از گروه‌های خودریختی این ایده را نشان دهیم.

۸.منابع

[1] S. G. Krantz, *A Geometric Approach To The Study Of Automorphism Groups*. Bull. Korean Math. Soc. 53 (2016), No. 4, pp.1043-1049
[2] D. G. Ebin, *On The Space Of Riemanian Metrics*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968),1001-1003
[3] C. Fefferman, *The Bergman Kernel And Biholomorphic Mapping Of Pseudoconvex Domain*, Invent. Math. 26 (1974), 1-65
[4] R. E. Greene, K.-T. Kim, and S. G. Krantz, *The Geometry of Complex Domains*, Birkh¨auser, Boston, 2011
[5] R. E. Greene and S. G. Krantz, *The automorphism groups of strongly pseudoconvex domains*, *Math*. Ann. 261 (1982), no. 4, 425–446.
[6] ------, *Deformations of complex structure*, estimates for the @-equation, and stability of the Bergman kernel, Adv. in Math. 43 (1982), no. 1, 1–86.
[7] ------, *Characterizations of certain weakly pseudo-convex domains with non-compact automorphism groups*, in Complex Analysis Seminar, 121–157, Springer Lecture Notes 1268, 1987.
[8] K.-T. Kim and S. G. Krantz, *A Kobayashi metric version of Bun Wong's theorem*, Complex Var. Elliptic Equ. 54 (2009), no. 3-4, 355–369.
[9] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Dekker, New York, 1970.
[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, *On automorphisms of a K¨ahlerian structure*, Nagoya Math. J. 11 (1957), 115–124.
[11] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[12]-------, *Convergence of automorphisms and semicontinuity of automorphism groups*, Real Anal. Exchange 36 (2010/11), no. 2, 421–433.
[13] L. Lempert, *La metrique Kobayashi et las representation des domains sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), no. 4, 427–474.
[14] J.-P. Rosay, *Sur une characterization de la boule parmi les domains de Cn par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), no. 4, 91–97.
[15] H. Seshadri and K. Verma, *On isometries of the Carath´eodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 5 (2006), no. 3, 393–417.
[16] K. Verma, Lecture at BIRS, May, 2006.
[17] B. Wong, *Characterizations of the unit ball in Cn by its automorphism group*, Invent. Math. 41 (1977), no. 3, 253–257.