ایده‌آل‌های اول و نیم اول در جبر کامیان- پسک

مریم کشول رجبزاده

استادیار گروه ریاضی، واحد آبادان، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران

چکیده

فرض کنیم Λ یک $k-$ گراف سطری- متناهی موضعا محدب و به طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان- پسک $KP_K(\Lambda)$ یک ایده‌آل اول باشد، در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر یک ایده‌آل اول است و مجموعه ایده‌آل‌های این جبر تحت زیرمجموعه بودن یک زنجیر تشکیل می‌دهند.

کلمات کلیدی: $k-$گراف، جبر کامیان- پسک، ایده‌آل اول، ایده‌آل نیم اول، به طور قوی غیردوره‌ای.

۱. مقدمه

C^*-جبرهای مربوط به گراف‌های جهت‌دار، اولین بار در سال ۱۹۹۰ (۱۳۶۹ خورشیدی) در [۹و ۸] به عنوان توسیعی از جبرهای کانتز- کریگر بررسی شدند. جبر مسیری لیویت که حالت جبری C^*-جبر گرافی است، در سال ۲۰۰۵ (۱۳۸۴ خورشیدی) مورد مطالعه قرار گرفت [۴و۲]. این جبرها به دلیل ساختار جالبی که داشتند توسط پژوهشگران بسیاری مطالعه شدند و مثال‌های جالبی در این زمینه بدست آمد. در سال ۲۰۰۰ (۱۳۷۹ خورشیدی)، کامیان و پسک در [۷]، $k-$گراف‌ها و C^*-جبرهای متناظر با آن‌ها را به منظور مدل‌سازی جبر کانتز-کریگر برای مرتبه $k \geq 1$ که در [۱۱و۱۰] توسط رابرتسون و استیگر معرفی شده بود، تعریف کردند. همچنین در سال ۲۰۱۱ جبر کامیان- پسک به عنوان ساختاری مشابه با جبر مسیری لیویت، برای گراف‌های با بعد بالاتر معرفی شد [۵] . یک $k-$گراف (یا یک گراف از مرتبه $k \geq 1$)، یک رسته (کاتگوری) $\Lambda=(\Lambda^0,\Lambda,r,s)$ به همراه یک ویژگی نمایش یکتاست، که در حالت خاص $k=1$، Λ همان گراف جهت‌دار می‌باشد.

در[۳]، رابطه ایده‌آل‌های اول و نیم اول در جبر مسیری لیویت بررسی شده است. در این مقاله، به بررسی رابطه این ایده‌آل‌ها در جبر کامیان- پسک می‌پردازیم و نشان می‌دهیم اگر در جبر کامیان- پسک $KP_K(\Lambda)$، $k-$ گراف Λ به طور قوی غیردوره‌ای باشد و هر ایده‌آل نیم اول در $KP_K(\Lambda)$ یک ایده‌آل اول باشد، در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر یک ایده‌آل اول است و مجموعه ایده‌آل‌های جبر $KP_K(\Lambda)$ تحت زیرمجموعه بودن یک زنجیر تشکیل می‌دهند.

ایده‌آل I در حلقه R را ایده‌آل نیم اول می‌گوییم هرگاه I به صورت اشتراک مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های اول در R باشد.

ایده‌آل I در جبر R را ایده‌آل اول می‌گوییم هرگاه برای هر زوج از ایده‌آل‌های I_1, I_2 در R که $I_1 I_2 \subseteq I$ نتیجه شودد $I_1 \subseteq I$ یا $I_2 \subseteq I$.

۲. تعاریف و قضایا

در این بخش، برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی $k-$گراف‌ها را از [۵] یادآوری می‌کنیم که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

این مقاله، مجموعه اعداد طبیعی شامل صفر را با $\mathbb{N}$ نشان داده و k را عدد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. برای $m,n \in \mathbb{N}^k$ می‌نویسیم $m \le n$ هرگاه برای هر $1 \le i \le k$ رابطه $m_i \le n_i$ برقرار باشد. همچنین، ماکسیمم مؤلفه‌ای m و n را با $m \vee n$ مشخص کرده و عضو $(0,0,\ldots,0) \in \mathbb{N}^k$ را با 0 نشان می‌دهیم.

تعریف ۱: یک k-گراف Λ، رسته شمارش‌پذیر $(\Lambda^0, \Lambda, r, s)$ به همراه یک تابعگر $d: \Lambda \to \mathbb{N}^k$ است که در خاصیت تجزیه یکتا صدق می‌کند. این خاصیت عبارت است از :

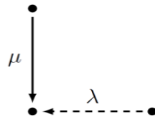
برای هر $\lambda \in \Lambda$ و $m,n \in \mathbb{N}^k$ با $d(\lambda) = m+n$، اعضای یکتای $\mu, \nu \in \Lambda$ وجود دارند که $\lambda = \mu\nu$، $d(\mu) = m$ و $d(\nu) = n$.

مثال ۲: گراف جهت‌دار و سطری-متناهی $E = (E^0, E^1, r, s)$ یک ۱-گراف است. رسته E را به صورت $(E^0, P(E), r, s)$ در نظر گرفته که در آن $P(E)$ مجموعه مسیرهای متناهی E است. (توجه کنید هر رأس E یک مسیر با طول صفر خواهد بود.) همچنین برای هر $\mu \in P(E)$، $s(\mu)$ و $r(\mu)$ به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ترکیب مسیرهای μ و ν با شرط $r(\nu) = s(\mu)$ به صورت $\mu\nu = \mu_1\mu_2\ldots\mu_{|\mu|}\nu_1\nu_2\ldots\nu_{|\nu|}$ تعریف می‌شود.

با تعریف تابعگر $d: P(E) \to \mathbb{N}$ به صورت $d(\mu) = |\mu|$، رسته مسیرهای $P(E)$ تبدیل به یک ۱-گراف می‌شود.

تعریف ۳: $k-$گراف Λ را موضعا محدب گوییم، هرگاه برای هر $v \in \Lambda^0$، $\lambda \in v\Lambda^{e_i}$ و $\mu \in v\Lambda^{e_j}$ که در آن $i \neq j$ و $1 \le i, j \le k$، مجموعه‌های $s(\lambda)\Lambda^{e_j}$ و $s(\mu)\Lambda^{e_i}$ غیرتهی باشند.

مثال ۴: ۲-گراف رسم شده در شکل، موضعا محدب نمی‌باشد. زیرا مجموعه‌های $s(\mu)\Lambda^{e_2}$ و $s(\lambda)\Lambda^{e_1}$ تهی هستند.



برای $k-$گراف موضعا محدب Λ و $n \in \mathbb{N}^k$، مجموعه $\Lambda^{\le n}$ را به صورت $\{\lambda \in \Lambda : d(\lambda) + e_i \le n \Rightarrow s(\lambda)\Lambda^{e_i} = \emptyset\}$ تعریف می‌کنیم . $k-$گراف Λ را سطری-متناهی می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}^k$ و $v \in \Lambda^0$، $v\Lambda^{\le n}$ مجموعه‌ای متناهی باشد.

تعریف ۵: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی موضعا محدب است و $m\in(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^k$. یک تابعگر حافظ درجه $x:\Omega_{k,m}\to\Lambda$ یک مسیر نامتناهی از درجه m نامیده می‌شود هرگاه، برای هر $p\in\mathbb{N}^k$ و $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ روابط $p\le m$ و $p_i=m_i$ نتیجه دهد $x(p)\Lambda^{e_i}=\emptyset$. درجه مسیر مرزی x با $d(x)$ نشان داده می‌شود. مجموعه مسیرهای مرزی با نماد $\Lambda^{\le\infty}$ و رأس $x(m,m)$ با نماد $x(m)$ نشان داده می‌شوند. برد مسیر مرزی x رأس $r(x):=x(0)$ است. اگر $x\in\Lambda^{\le\infty}$ و $n\le d(x)$، آن‌گاه یک مسیر مرزی $\sigma^n(x)$ از درجه $d(x)-n$ وجود دارد به طوری که برای هر $p\le q\le d(x)-n$ داشته باشیم

$$\sigma^n(x)(p,q):=x(p+n,q+n).$$

۱.۲. جبرهای کامیان-پسک

در این بخش جبر کامیان- پسک و چند مفهوم دیگر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶: [۴] فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری- متناهی و موضعا محدب و K یک میدان است. فرض کنید $G_\Lambda=\{\lambda^*:\lambda\in\Lambda\}$. یک Λ– خانواده کامیان-پسک در جبر A یک تابع به صورت $s:\Lambda\cup G(\Lambda)\to A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\{s_v: v\in\Lambda^0\}$ یک خانواده از عناصر خودتوان دو به دو عمود بر هم باشند.

۲) برای هر $\lambda,\mu\in\Lambda^{\neq 0}$ که $r(\mu)=s(\lambda)$ داشته باشیم

$$s_{r(\lambda)}s_\lambda=s_\lambda=s_\lambda s_{s(\lambda)},\quad s_{s(\lambda)}s_{\lambda^*}=s_{\lambda^*}=s_{\lambda^*}s_{r(\lambda)},\quad s_{\mu^*}s_{\lambda^*}=s_{(\lambda\mu)^*},\ s_\lambda s_\mu=s_{\lambda\mu}.$$

۳) برای هر $\lambda,\mu\in\Lambda^{\neq 0}$ که $\lambda,\mu\in\Lambda^{\le n}$ داشته باشیم $s_{\lambda^*}s_\mu=\delta_{\lambda,\mu}s_{s(\lambda)}$.

۴) برای هر $v\in\Lambda^0$ و $n\in\mathbb{N}^k\setminus\{0\}$، $s_v=\sum_{\lambda\in v\Lambda^{\le n}}s_\lambda s_{\lambda^*}$.

جبر کامیان-پسک تولید شده به‌وسیله Λ با ضرایب در میدان K که با $KP_K(\Lambda)$ نمایش داده می‌شود، یک جبر جامع تولید شده به‌وسیله یک Λ– خانواده کامیان-پسک $\{s_\lambda,s_{\lambda^*}:\lambda\in\Lambda\}$ است. ویژگی جامع بودن برای جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ بدین معنی است که اگر A یک K–جبر و $\{T_\lambda,T_{\lambda^*},T_v: v\in\Lambda^0,\lambda\in\Lambda\}$ یک Λ– خانواده کامیان-پسک در جبر A باشد، آن‌گاه یک K–جبر همریختی $\pi_T:\mathrm{KP}_K(\Lambda)\to A$ وجود دارد به طوری که:

$$\pi_T(s_v)=T_v,\quad \pi_T(s_\lambda)=T_\lambda,\quad \pi_T(s_{\lambda^*})=T_{\lambda^*}.$$

وجود این ویژگی جامع برای $KP_K(\Lambda)$ در [۴ و ۳] بررسی شده است.

یادآوری می‌کنیم حلقه R را $\mathbb{Z}^k$–مدرج گوییم هرگاه مجموعه‌ای از زیرگروه‌های جمعی $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R_{n_1}R_{n_2}\subseteq R_{n_1+n_2}$، برای هر $n_1,n_2\in\mathbb{Z}^k$. در این صورت، هر عضو غیرصفر $a\in R$ را می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی و یکتا از عناصر غیرصفر $a_n\in R_n$ نوشت. هر زیرگروه R_n را یک جزء همگن R از درجه n می‌گوییم. اگر R حلقه‌ای مدرج باشد، ایده‌آل I در R را مدرج گوییم هرگاه مجموعه $\{I\cap R_n: n\in\mathbb{Z}^k\}$ یک درجه‌بندی برای I باشد.

تعریف ۷: زیرمجموعه H از Λ^0 موروثی نامیده می‌شود هرگاه $\lambda\in\Lambda$ و $r(\lambda)\in H$ نتیجه دهد $s(\lambda)\in H$. زیرمجموعه H از Λ^0 را اشباع می‌گوییم هرگاه برای $v\in\Lambda^0$ و $n\in\mathbb{N}^k$ رابطه $s(v\Lambda^{\le n})\subseteq H$ نتیجه دهد $v\in H$. توجه کنید ویژگی‌های موروثی و اشباع تحت اشتراک بسته هستند. مجموعه همه زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ^0 را با H_Λ

نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم برای یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در $\Lambda^{\cdot}$، ایده‌آل I_H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_H := span\{s_\mu s_{\lambda^*} : s(\mu) = s(\lambda) \in H\}$$

بنا بر [۳ , ۴]، I_H یک ایده‌آل مدرج در $KP_K(\Lambda)$ است.

تذکر: در این مقاله منظور از ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$، ایده‌آلی دوطرفه است.

تعریف ۸: فرض کنیم Λ یک $k-$گراف سطری-متناهی و موضعا محدب است. Λ را غیردوره‌ای گوییم هرگاه برای هر $v \in \Lambda^0$ یک مسیر مرزی $x \in v\Lambda^{\leq\infty}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\mu \neq \nu \in \Lambda$ داشته باشیم $\mu x \neq \nu x$. همچنین $k-$ گراف Λ را به طور قوی غیردوره‌ای است هرگاه برای هر زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ^0، $\Lambda \setminus H$ غیردوره‌ای باشد.

۲.۲. ایده‌آل‌های اول و نیم اول

فرض کنیم Λ یک $k-$ گراف سطری- متناهی موضعا محدب و به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. در این بخش نشان می‌دهیم اگر هر ایده‌آل نیم اول در این جبر یک ایده‌آل اول باشد، در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر، یک ایده‌آل اول است

قضیه ۹: فرض کنیم Λ یک $k-$گراف سطری متناهی موضعا محدب و K یک میدان است. همچنین هر ایده‌آل نیم اول در این جبر یک ایده‌آل اول است. در این‌صورت مجموعه ایده‌آل‌های اول در جبر کامیان- پسک تحت زیرمجموعه بودن یک زنجیر تشکیل می‌دهد.

اثبات: فرض کنیم هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان- پسک $KP_K(\Lambda)$ ایده‌آلی اول باشد، اما مجموعه ایده‌آل‌های اول زنجیر تشکیل ندهند. پس ایده‌آل‌های اول I و J در $KP_K(\Lambda)$ وجود دارند به طوری‌که $I \not\subset J$ و $J \not\subset I$. عناصر x و y را به ترتیب در $I \setminus J$ و $J \setminus I$ انتخاب می‌کنیم. حال $xKP_K(\Lambda)y$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به ایده‌آل بودن I و J در جبر $KP_K(\Lambda)$، روابط $xKP_K(\Lambda)y \subseteq I$ و $xKP_K(\Lambda)y \subseteq J$ برقرار است. بنابراین $xKP_K(\Lambda)y \subseteq I \cap J$. اما $I \cap J$ یک ایده‌آل نیم اول در $KP_K(\Lambda)$ است. پس بنا به فرض قضیه $I \cap J$ یک ایده‌آل اول است. بنابراین x یا y به $I \cap J$ تعلق دارد. پس $x \in J$ یا $y \in I$، و این تناقض است. بنابراین مجموعه ایده‌آل‌های اول در جبر کامیان- پسک یک زنجیر تشکیل می‌دهند.

قضیه ۱۰: [۱] فرض کنیم R یک حلقه و مجموعه $\{P_l : l \in L\}$ یک زنجیر نزولی (تحت زیرمجموعه بودن) از ایده‌آل‌های اول حلقه R باشد. در اینصورت $\cap_{l\in L} P_l$ نیز یک ایده‌آل اول از حلقه R است.

قضیه ۱۱: فرض کنیم Λ یک $k-$گراف سطری متناهی موضعا محدب و به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. اگر در این جبر مجموعه ایده‌آل‌های اول تحت زیرمجموعه بودن تشکیل یک زنجیر دهند، در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر، یک ایده‌آل اول است و بنابراین مجموعه ایده‌آل‌های $KP_K(\Lambda)$ یک زنجیر تشکیل می‌دهند.

اثبات: چون Λ به طور قوی غیردوره‌ای است، بنابراین هر ایده‌آل I در جبر کامیان- پسک، یک ایده‌آل مدرج است. یعنی زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ^0 وجود دارد که $I = I_H$. بنابراین هر ایده‌آل در این جبر نیم اول است، پس به

صورت اشتراکی از ایده‌آل‌های اول می‌باشد. از طرفی بنا به فرض قضیه، ایده‌آل‌های اول در این جبر تشکیل یک زنجیر می‌دهند. پس بنا به قضیه ۱۰، اشتراک این ایده‌آل‌ها ایده‌آلی اول است. پس هر ایده‌آل در این جبر ایده‌آلی اول است.

نتیجه ۱۲: فرض کنیم Λ یک $k-$گراف سطری متناهی موضعا محدب و به طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است و هر ایده‌آل نیم اول در این جبر یک ایده‌آل اول است. در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر یک ایده‌آل اول است و بنابراین مجموعه ایده‌آل‌های این جبر یک زنجیر تشکیل می‌دهند.

۳. نتیجه و جمع‌بندی

فرض کنیم Λ یک $k-$گراف سطری متناهی موضعا محدب و K یک میدان است. در این مقاله به بررسی برخی از روابط بین ایده‌آل‌های اول و نیم اول در جبر کامیان- پسک $KP_K(\Lambda)$ می‌پردازیم. در ابتدا نشان دادیم اگر در این جبر هر ایده‌آل نیم اول یک ایده‌آل اول باشد، در این‌صورت مجموعه ایده‌آل‌های اول در جبر کامیان- پسک تحت زیرمجموعه بودن یک زنجیر تشکیل می‌دهند. سپس بررسی کردیم اگر Λ به طور قوی غیردوره‌ای باشد و مجموعه ایده‌آل‌های اول در این جبر یک زنجیر تشکیل دهند، در این‌صورت هر ایده‌آل این جبر یک ایده‌آل اول است. با ترکیب این دو قضیه، نتیجه ۱۲ حاصل شد. به عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی می‌توان این قضیه را بدون قرار دادن شرط به طور قوی غیردوره‌ای بودن روی $k-$گراف Λ بررسی کرد.

۴. مراجع

[1] G. Abrams, G. Aranda Pino, Z. Mesyan and C. Smith, "Realising posets as prime spectra of Leavitt Path algebras", *J. Algebra*, vol. 476, pp. 267-296, 2017.

[2] G. Abrams and G. Aranda Pino, "The Leavitt path algebras of a graph", *J. Algebra*, vol. 293, pp. 319-334, 2005.

[3] G. Abrams, B. Greenfeld, Z. Mesyan and K. M. Rangaswamy, "chains of semi prime and prime ideals in Leavitt Path algebras", *Contemp. Math.*, vol. 715, pp. 1-16, Amer. Math. Soc., Providence, IR, 2018.

[4] P. Ara, M. A. Moreno and E. Pardo, "Nonstable K- theoryfor graph algebras", *Algebr. Represent. Theory*, vol. 10, pp. 157-178, 2007.

[5] G. Aranda Pino, J. Clark, A. an Huef and I. Raeburn, "Kumjian-Pask algebras of higher rank graphs", *Trans. Amer. Math*, vol. 365, pp. 3613-3641, 2013.

[6] L. O. Clark, C. Flynnand. And A. an Huef, "Kumjian-Pask algebras of locally convex higher-rank graphs", *J. Algebra*, vol. 399, pp. 445-474, 2014.

[7] A. Kumjian and D. Pask, "Higher rank graph C^*-algebras", *J. Math*, vol. 6, pp. 1-20, 2000.

[8] A. Kumjian, D. Pask and I. Raeburn, "Cuntz-Krieger algebras of directed graphs", *Pacific J. Math.*, vol. 184, pp. 161-174. MR1626528 (99i:46049), 1998

[9] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn and J. Renault, "Graphs, groupoids and Cuntz-Krieger algebras", *J. funct. Anal.*, Vol. 144, pp. 505-541, 1997.

[10] G. Robertson and T. Steger, “Affine buildings, titing systems and higher rank Cuntz- Krieger algebras”, *J. Reine Angew. Math*, vol. 513, pp. 115-144, 1999.

[11] G. Robertson and T. Steger, “Asymptotic K-theory for groups acting on $\tilde{A}$ buildings”, *Can. J. Math*, vol. 53, pp. 809-833, 2001.